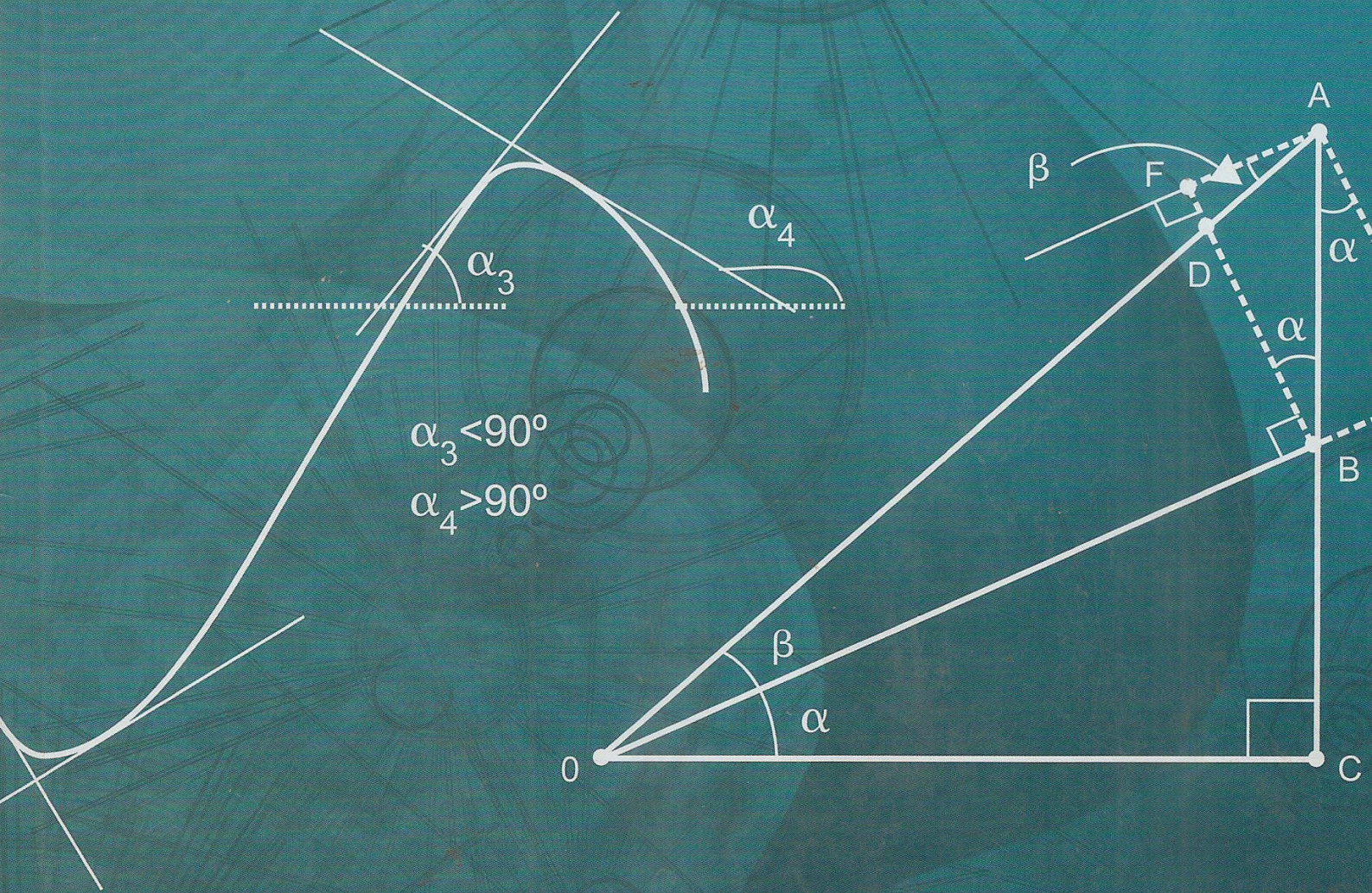


JOÃO BARCELOS NETO

CÁLCULO

Para entender e usar



João Barcelos Neto

Cálculo:

PARA ENTENDER E USAR



Sumário

Prefácio	7
Capítulo I – Introdução	9
Antes de começar a estudar funções	10
Capítulo II – Funções e limites	13
1. Funções de potência	14
2. Limites	15
3. Relação binomial	18
Exercícios	20
Capítulo III – Derivadas	23
1. Conceito de derivada	23
2. Derivada de funções de potência – Caso geral	25
3. Regra da cadeia de derivação	26
4. Mais algumas regras de derivação	27
5. Um exemplo para finalizar o capítulo	29
Exercícios	29
Capítulo IV – Aplicações de derivada	31
1. Um exemplo prático do uso de derivada	31
2. Exemplo de geometria	34
3. Um exemplo de Física Básica	36
Exercícios	40

Capítulo V – Integrais	45
1. Outra forma de olhar para uma relação diferencial de primeira ordem	45
2. Um exemplo de geometria	49
3. Um exemplo de Física Básica	52
4. Propriedades e regras de integração	54
5. Uma visão geral sobre o processo de integração	55
6. Integrais duplas, triplas etc.	59
Exercícios	62
Capítulo VI – Funções trigonométricas	67
1. Relações trigonométricas no triângulo retângulo	67
2. Seno, cosseno, tangente etc. como funções	72
3. Alguns valores particulares de seno e cosseno	74
4. Derivada de funções trigonométricas	77
5. Exemplo de aplicação de derivadas de funções trigonométricas	81
6. Integrais envolvendo funções trigonométricas.	82
7. Exemplo de integrais na geometria	88
8. Exemplo de integrais trigonométricas em física básica	96
9. Exemplo de integrais trigonométricas num problema de probabilidades	97
Exercícios	101
Capítulo VII – Funções exponenciais e logarítmicas	107
1. Introdução	107
2. Derivada das funções exponencial e logarítmica	108
3. Integrais envolvendo funções exponenciais e logarítmicas	110
4. Um exemplo de Física Básicas	110
5. Função gama ou função fatorial	113
Exercícios	116
Apêndice A – Vetores	120
1. Básico	120
2. Produtos escalar e vetorial	123
3. Utilização dos produtos escalar e vetorial	125
Exercícios	
Apêndice B – Uma demonstração do teorema de Pitágoras	132
Apêndice C – Exemplo de equação diferencial	135
Apêndice D – Expansão de uma função em série de potências	138
Apêndice E – Resolução de alguns exercícios	141
Apêndice F – Respostas de alguns exercícios	156

Prefácio

Quando dava aulas no ciclo básico sempre preferia turmas em períodos defasados, a fim de que o estudante já viesse sabendo Cálculo. Mesmo assim, notava que embora ele soubesse derivar e integrar, muitas vezes com certa desenvoltura, não sabia raciocinar com o Cálculo. Geralmente não sabia porque estava derivando ou o que estava integrando.

É esta a finalidade deste livro. Ele contém a minha experiência em procurar fazer o estudante raciocinar com o Cálculo. Embora mostre como derivar e integrar, a ênfase não está bem aí. Não há formulários. Na verdade, há poucas fórmulas. Procurei não usar nada em que não fosse mostrado sua origem. Posso até ter exagerado em fazer uma demonstração do Teorema de Pitágoras num dos apêndices e enfatizar que não há necessidade de saber uma fórmula para resolver uma equação do segundo grau. Fiz isso com o intuito de não descuidar do principal objetivo do livro, que era priorizar o raciocínio em lugar do uso irracional de fórmulas prontas. Há muitos exemplos, principalmente em Geometria e Mecânica. Neste caso, procurei refazer alguns exemplos do meu livro de Mecânica, porém usando uma linguagem mais simples.

Este livro é organizado da seguinte maneira. No Capítulo I faço uma apresentação geral do que pretendo desenvolver no livro. O Capítulo II contém uma breve introdução da matemática necessária para começar o desenvolvimento de derivadas e integrais, particularizando ao caso de funções de potência. Prefiro esse caminho a fim de que a complexidade de outros tipos de função, neste momento, ao não viesse a obscurecer as propriedades fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral. Aproveitei a oportunidade para relembrar a relação binominal, que será de grande utilidade durante todo o livro e, particularmente, nesta fase inicial. No Capítulo III é introduzido o conceito de derivada e aplicado ao caso de funções de potência. Aproveito para falar sobre as propriedades gerais da derivação. No Capítulo IV apresento diversas aplicações. Faço menção que resolver uma equação diferencial nem sempre está associado à resolução de uma integral (caso que pretendo deixar claro no Apêndice C). No Capítulo V introduzo integrais, procurando enfatizar que integrais nada mais são do que olhar de maneira diferente uma equação diferencial de primeira ordem. Aproveito, também, para fazer a generalização para integrais duplas e triplas. Discuto várias aplicações. Acho importante mencionar que, até agora, só funções de potência foram consideradas. Derivadas e integrais envolvendo (ou usando) funções trigonométricas, bem como aplicações, estão no Capítulo VI, e o correspondente para funções exponenciais e logarítmicas, no Capítulo VII. Há seis apêndices. No Apêndice A é feita uma revisão, contendo também várias aplicações de vetores. No Apêndice B é apresentada uma demonstração

geométrica do teorema de Pitágoras. O Apêndice C contém um exemplo de solução de equação diferencial e no Apêndice D mostro uma forma indutiva da expansão em série de potências. Nos Apêndices E e F há soluções e respostas de alguns exercícios.

Para finalizar, gostaria de dizer que a oportunidade de escrever este livro está relacionada, também, aos três anos em que ministrei a disciplina de Cálculo no Curso de Formação de Oficiais do Corpo de Bombeiros do Rio de Janeiro. Esta foi uma experiência muito prazerosa, ocorrida após a minha aposentadoria. Tive a oportunidade de voltar a viver um pouco da minha juventude. O convívio com esses excelentes e simpáticos estudantes motivaram-me a iniciar este trabalho.

Rio de Janeiro, em 24 de dezembro de 2008.

João Barcelos Neto
www.joaobarcelos.com.br

Capítulo I

Introdução

Neste capítulo procurarei mostrar no que consiste o Cálculo Diferencial e Integral (derivadas e integrais). Para que tenhamos uma noção clara de seus princípios básicos, discutirei, resumidamente, sobre os passos que serão seguidos no livro. Com isto, acredito que, mesmo com algumas possíveis dificuldades técnicas aqui e ali, o fio da meada nunca será perdido.

Considere, então, a Figura I.1. Ela representa o gráfico de uma certa função $f(x)$ (no Capítulo II falaremos sobre funções com mais detalhes), na qual está traçada a tangente à curva num ponto genérico P . O ângulo α é chamado de inclinação da curva neste ponto.

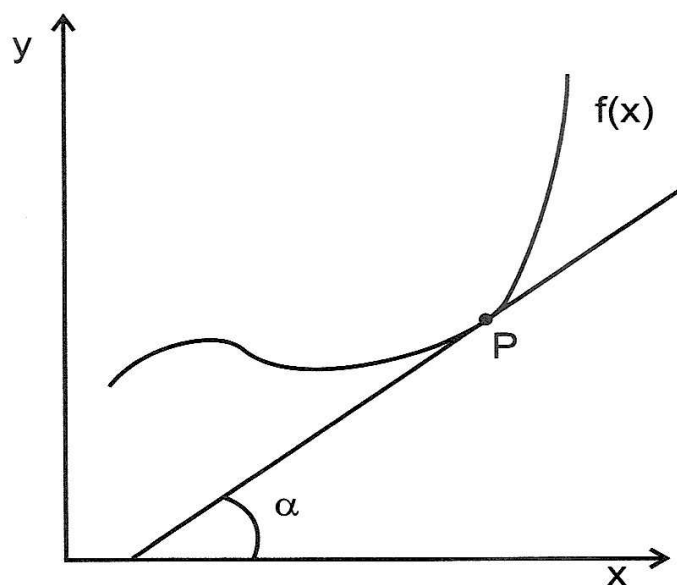


Figura I.1: Representação gráfica de um função $f(x)$

Quando conhecemos a função correspondente a um determinado fenômeno, temos uma quantidade importante de informações sobre ele. Conhecendo-se a inclinação da curva em cada ponto, teremos mais informações sobre este mesmo fenômeno. É exatamente este o papel da derivada. Ela nos dá a inclinação da curva em cada ponto. Como disse, os detalhes, importância e aplicações serão vistos nos passos mais detalhados que daremos.

Uma outra questão, também importante, é justamente o inverso. Isto é, algumas vezes conhecemos a inclinação da curva, mas não a curva. Temos aí

uma equação (que pela sua natureza é chamada de equação diferencial), na qual a incógnita é a função. É nesta fase que aparecem (ou podem aparecer) as integrais.

Pois bem, prestem bastante atenção no que foi dito nestes poucos parágrafos acima, porque o conteúdo básico de tudo que veremos sobre derivadas e integrais está contido neles. O que iremos ver a seguir nada mais é do que explicações detalhadas dessas idéias, aplicadas a vários tipos de função e exemplos.

Antes de começar a estudar funções

Como disse, no capítulo seguinte trataremos das funções, particularmente das funções de potência. Vamos aproveitar este final de capítulo para falar um pouco sobre a postura que espero de vocês durante a apresentação dos assuntos e, principalmente, na resolução de exercícios

Normalmente, nossa maneira de agir diante de determinado problema é seguir procedimentos já elaborados, sem muitos questionamentos. É claro, isto é algo perfeitamente normal e pode economizar tempo e esforço. Entretanto, por outro lado, pode também nos levar a bloqueios em determinadas situações. Isto acontece quando se trata de algo um pouco diferente do que é considerado como familiar, ou algo que, por tradição, possa transparecer dificuldades. Deixe-me apresentar alguns exemplos.

- Vamos supor que você seja apresentado a uma equação do tipo

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$$

e seja pedido a você resolvê-la. Pode haver um bloqueio, pois a fórmula de resolução de uma equação do terceiro grau não é tão familiar como o conhecido caso do segundo grau. Por outro lado, se você olhar para a equação, sem nenhum bloqueio de fórmulas em sua mente, você poderá notar que suas raízes não são tão difíceis de serem inferidas. Elas são 1, -1 e -3.

Isto não quer dizer que você sempre conseguirá resolver um problema seguindo caminhos não convencionais. Não é isto. O que acontece é que às vezes, não necessariamente na Matemática, você é solicitado a resolver um determinado problema (e não todos os problemas). Pode ser que aquele, justamente aquele que você está diante dele, tenha uma solução simples. Por que, então, não estarmos abertos para esta possibilidade?

- Já que falamos acima em equação do segundo grau, vamos supor que você tenha sido apresentado a uma delas. Suponha, também, que as raízes não sejam tão simples para serem inferidas e que você não lembre da fórmula.

Este é outro bloqueio a que geralmente somos submetidos. O uso repetido de uma conhecida solução pré-elaborada pode levar à conclusão de que isto só ocorre porque o problema inicial é muito difícil. Será que é este o caso da

equação do segundo grau, cuja fórmula é uma das mais conhecidas? Realmente não é, pois

$$\begin{aligned}
 & ax^2 + bx + c = 0 \\
 \Rightarrow & x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\
 \Rightarrow & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \\
 \Rightarrow & x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \\
 \Rightarrow & x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
 \end{aligned}$$

Como vemos, talvez nem fosse necessária uma fórmula para resolver equações do segundo grau. Procure resolver algumas equações do segundo grau desta maneira, sem recorrer ao uso da fórmula. Você verá que, geralmente, há muito menos trabalho algébrico. Não custa nada apresentar um exemplo. Considere-mos que nos seja pedido para resolver a equação

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

Observando os dois primeiros termos, vemos, facilmente, que ela pode ser reescrita como

$$(x + 1)^2 - 16 = 0$$

De onde imediatamente conclui-se

$$x + 1 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

ou

$$x + 1 = -4 \quad \Rightarrow \quad x = -5$$

que são as duas raízes da equação!

• Para concluir, vou citar mais um exemplo que, particularmente, me incomodou durante algum tempo: a forma usual de se medir comprimentos, áreas e volumes é começar especificando um certo padrão de comprimento l , digamos, $1cm$, $1m$, $1pol$ etc. A medida de área passa a ser feita com um quadrado l^2 ($1cm^2$, $1m^2$, $1pol^2$ etc.) e a de volume com um cubo l^3 ($1cm^3$, $1m^3$, $1pol^3$ etc.).

Vamos utilizar o exemplo de um retângulo de dimensões $4l$ por $6l$. Sua área será, portanto, dada por 24 quadrados l^2 , como mostra a Figura I.2. Obviamente, tudo isto é muito bem conhecido.

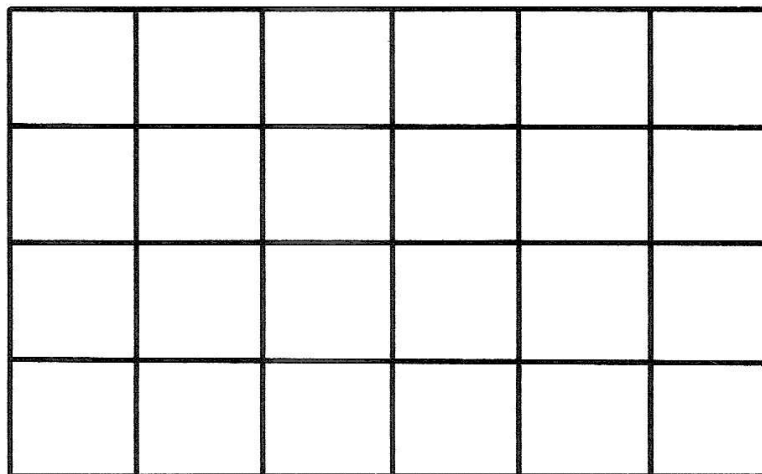


Figura I.2: Retângulo de área $24l^2$

Vamos agora olhar o retângulo da Fig. I.2 de outra forma e chamar cada quadrado de Q . É claro que a área continua sendo $24Q$, mas podemos perfeitamente identificá-lo, olhando para os quadrados da periferia, dizendo que ele tem dimensões de $4Q$ por $6Q$ (em lugar de $4l$ por $6l$), isto é, estamos usando o próprio quadrado Q como unidade de comprimento (veja Figura I.3)!

Esta é a linguagem do mundo digital, na qual o quadrado toma o nome de “pixel”. As imagens numa câmara digital se processam sobre uma placa foto-sensível. Esta placa é um reticulado. Quando maior o número de quadrados da rede do reticulado, maior a resolução. Por exemplo, uma imagem de 3 milhões de pixels (3 mega pixels ou 3MP) pode corresponder a uma imagem retangular de 1.500 por 2.000 pixels.

Levei algum tempo para conseguir ver que um quadrado também pode ser usado como uma medida de comprimento (e entender um pouco sobre imagens digitais). Os professores também têm bloqueios.

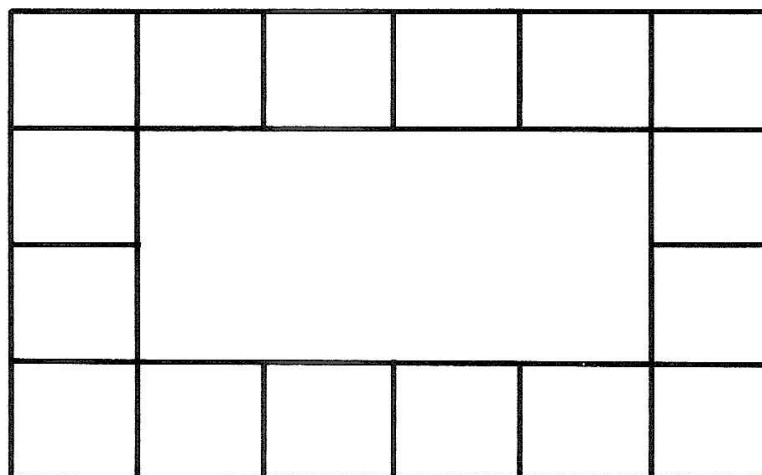


Figura I.3: Retângulo com dimensões $4Q$ por $6Q$

Capítulo II

Funções e limites

Neste capítulo discorreremos brevemente sobre funções e concentrar-nos-emos nas funções de potência. Deixaremos funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas para outros capítulos.

Funções são, simplesmente, uma correspondência entre um número real e outro (funções de variáveis reais). Veja o diagrama abaixo.

$$\left(\begin{array}{c} \text{número} \\ \text{real} \end{array} \right) \xrightarrow{f} \left(\begin{array}{c} \text{outro n.º} \\ \text{real} \end{array} \right)$$

Como exemplos de função temos

$$\begin{array}{ll} y = ax + b & \text{reta} \\ y = ax^2 + bx + c & \text{parábola} \end{array}$$

em que a , b e c são parâmetros constantes. Outras funções que correspondem a figuras geométricas conhecidas são

$$\begin{array}{ll} x^2 + y^2 = R^2 & \text{círculo} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 & \text{elipse} \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 & \text{hipérbole} \end{array}$$

Acredito que vocês estejam familiarizados com o traçado de gráficos. Caso isto não aconteça, não há muita importância. Se for necessário, faremos a apresentação gráfica das funções que serão apresentadas.

1. Funções de potência

Vejamos as funções de potência com um pouco mais de detalhes. Estamos chamando funções de potência as relações em que a variável real está elevada a um número racional (número que pode ser obtido da razão entre dois números inteiros). O caso de potências na qual o expoente é um número real qualquer (mesmo irracional) constitui as funções exponenciais.

Começemos citando a primeira noção de potência que nos é apresentada em cursos bem elementares. Se n é um número inteiro qualquer, temos que a notação x^n representa

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n \text{ vezes}} \quad (\text{II.1})$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} x^n \cdot x^m &= \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n \text{ vezes}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{m \text{ vezes}} \\ &= x^{n+m} \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

As perguntas que se colocam agora são: Qual o significado de x^n quando n não é um número inteiro? Ou quando n não é um número positivo? Ou quando as duas coisas acontecem?

Fica difícil pensar sobre isto olhando para (II.1). Entretanto, admitindo (II.2) como ponto de partida (e não fazendo nenhuma restrição quanto aos valores de n e m), teremos respostas para as perguntas formuladas. Por exemplo, o significado de $x^{\frac{1}{2}}$ é facilmente obtido considerando que

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} &= x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \\ &= x^1 \\ &= x \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Portanto, lembrando do conceito de raiz quadrada, temos

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \quad (\text{II.4})$$

Da mesma maneira, concluímos que $x^{\frac{1}{3}}$ é a raiz cúbica de x , $x^{\frac{1}{4}}$ é a raiz quarta e assim por diante ($x^{\frac{1}{n}}$ é a raiz n -ésima de x).

O significado de x^0 pode também ser obtido diretamente

$$\begin{aligned} x^n \cdot x^0 &= x^{n+0} \\ &= x^n \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Logo, concluímos que

$$x^0 = 1 \tag{II.6}$$

Com este resultado obtemos o significado de x^{-n} (n inteiro ou não)

$$\begin{aligned} x^n \cdot x^{-n} &= x^{n-n} \\ &= x^0 \\ &= 1 \end{aligned} \tag{II.7}$$

Assim,

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \tag{II.8}$$

2. Limites

Vamos aproveitar os conhecimentos que já temos sobre funções para introduzir o conceito de limite, o que será feito de forma bem direta. Tomemos, como ponto de partida, uma função bem simples (uma reta).

$$f(x) = 2x + 1$$

O valor desta função para alguns pontos particulares são

$$\begin{aligned} f(1) &= 3 \\ f(0) &= 1 \\ f(-1) &= -1 \\ \text{etc.} \end{aligned} \tag{II.9}$$

Podemos introduzir o conceito de limite dizendo simplesmente que o limite de $f(x)$ quando x tende a 1 é 3, que o limite de $f(x)$ quando x tende a 0 é 1 etc. Matematicamente, escrevemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= -1 \end{aligned} \tag{II.10}$$

Há alguma diferença entre as duas notações? Para os casos particulares acima, a resposta é não. Elas poderiam ser usadas indistintamente. Estamos apresentando o conceito de limite (de forma bem simples) como sendo o valor

que tende a função quando a variável tende a um certo valor ¹. A notação das expressões (II.10) torna-se mais apropriada no caso em que a variável e (ou) a função tendem para um símbolo e não um número. Por exemplo, considerando a mesma função acima, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad (\text{II.11})$$

Como outros exemplos, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{x} &= \infty \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

Consideremos, agora, o seguinte exemplo.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \quad (\text{II.13})$$

A quantidade $\frac{0}{0}$ não pode ser associada, de forma absoluta, a nenhum número. Inadvertidamente, poder-se-ia pensar que é 1, mas não é (ou pode não ser). Observando-a com mais atenção, é fácil perceber o porquê disto. Qualquer número (diferente de zero) dividido por zero é infinito, mas zero dividido por qualquer número (também diferente de zero) é zero. $\frac{0}{0}$ é uma quantidade indeterminada e é chamada de símbolo de indeterminação. Adiantemos que existem outros: $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 e 1^∞ . A quantidade 0^∞ não é um símbolo de indeterminação (qualquer número menor que 1 elevado a infinito dá zero, logo $0^\infty = 0$).

Acho também oportuno fazer um comentário sobre o símbolo de indeterminação 1^∞ . No caso de

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 1^x = 1$$

Não há indeterminação. Agora, se tivéssemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)^x = 1^\infty$$

Poderia ser qualquer valor.

Geralmente, diz-se que limites do tipo dado por (II.13) são indeterminados. Esta, talvez, seja uma terminologia não muito apropriada, pois os limites na verdade existem. Acontece que estão escondidos (fato constatado pela presença do símbolo de indeterminação). No caso particular da relação (II.13), temos

¹Isto coincide com a definição rigorosa de limite no caso de funções contínuas. Como sempre lidaremos com esse tipo de função, o que estamos fazendo está correto.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) \\
&= 2
\end{aligned} \tag{II.14}$$

Como vemos, o limite de fato existe. Ele estava escondido devido ao fator $x - 1$ do numerador e denominador. Isto não quer dizer que $\frac{0}{0}$ seja igual a 2. $\frac{0}{0}$ não é igual a nada (é uma quantidade indeterminada). O que mostramos é que, no caso particular de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, o resultado é 2. No caso do limite de uma outra função, dando o mesmo símbolo de indeterminação, o resultado pode ser outro. Realmente,

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \frac{0}{0} \tag{II.15}$$

Como -2 é raiz de $x^3 + 8$, com um pouco de manipulação algébrica podemos escrever $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ (procure você mesmo se convencer disto). Então,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{x + 2} \\
&= \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 2x + 4) \\
&= 12
\end{aligned} \tag{II.16}$$

A maneira como tratamos os exemplos expostos não significa que tenha de ser usada em todos os casos. O próprio exemplo da expressão (II.15) admite um tratamento mais simples (usado em muitos casos). Fazendo $x + 2 = u$ na relação (II.15), temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(u - 2)^3 + 8}{u} \\
&= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^3 - 6u^2 + 12u}{u}
\end{aligned} \tag{II.17}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{12u}{u} \tag{II.18}$$

$$= 12 \tag{II.19}$$

em que na passagem dada por (II.18) desprezaram-se os termos u^3 e $-6u^2$ perante $12u$, pois quando $u \rightarrow 0$ estes termos tendem a zero mais rapidamente que $12u$. Poderíamos, também, ter simplificado o u no numerador e denominador de (II.17) e, depois, fazer $u \rightarrow 0$ no resultado [de fato, foi isto o que fizemos indiretamente, e com mais trabalho algébrico, em (II.16)].

Usando raciocínio semelhante, podemos resolver o problema de indeterminação do seguinte limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 7}{8x^2 + 5x + 2} = \frac{\infty}{\infty} \quad (\text{II.20})$$

Quando $x \rightarrow \infty$ os termos quadráticos divergem muito mais rapidamente que os demais termos do numerador e denominador. Podemos então desprezá-los e manter apenas os termos quadráticos. Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 7}{8x^2 + 5x + 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{8x^2} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

3. Relação binomial

Nos dois últimos exemplos, fizemos algumas simplificações quando vimos ser possível desprezar alguns termos perante outros (ou por não serem muito pequenos ou por não serem tão grandes). Existe uma relação que pode facilitar sobremaneira procedimentos como este. É a chamada relação binomial, que corresponde à expansão para $(a + b)^n$.

A dedução da relação binomial para qualquer n (em princípio inteiro) pode ser feita por indução. Vamos fazer isto. Sem muito trabalho algébrico, podemos escrever as primeiras relações para $n=2$, $n=3$, $n=4$.

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 \\ &= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a + b)^4 &= (a + b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

De forma semelhante, calcularíamos (não deixe de verificar você mesmo)

$$\begin{aligned} (a + b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\ (a + b)^6 &= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6 \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

O ponto importante, agora, é procurar reescrever os coeficientes dos termos de cada expansão, de forma tal que sejamos capazes de induzir os coeficientes das

próximas expansões. Seja então a última expressão, dada por (II.23). Podemos reescrevê-la como

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + \frac{6 \cdot 5}{2!} a^4b^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} a^3b^3 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4!} a^2b^4 + 6ab^5 + b^6 \quad (\text{II.24})$$

em que $2!=2 \cdot 1$ (fatorial de 2), $3!=3 \cdot 2 \cdot 1$ (fatorial de 3) etc. Com isto e introduzindo a notação (chamada coeficiente binomial)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (\text{II.25})$$

vê-se que a relação (II.24) pode ser reescrita como

$$(a+b)^6 = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} a^{6-k} b^k \quad (\text{II.26})$$

na qual usou-se que $0!=1$ ². Notamos que todas as relações da sequência dada por (II.22) e (II.23) podem ser escritas de forma semelhante, com o 6 substituído pelo coeficiente correspondente. Assim, para um certo valor de n teríamos

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (\text{II.27})$$

Para verificar que a relação (II.27), obtida por indução, está correta para qualquer n (inteiro), temos de ver se ela é válida para $n+1$ (exercício 2). Adiantemos, também, que (II.27) é válida mesmo que n não seja inteiro (trataremos disso no Apêndice D).

Seja, agora, um exemplo de limite do qual faremos uso direto da relação binomial.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{10} - a^{10}}{x - a} = \frac{0}{0} \quad (\text{II.28})$$

Como $x = a$ é raiz de $x^{10} - a^{10}$, poderíamos tentar o mesmo procedimento da primeira solução de (II.16). Mas, como o expoente aqui é muito grande, isto levará a um enorme trabalho algébrico. Vamos seguir um processo semelhante ao do desenvolvimento dado por (II.17) – (II.19). A fim de passar para um limite com a variável tendendo a zero (isto facilitará a eliminação dos termos que tenderão a zero mais rapidamente que outros), substituamos $x - a$ por u . Assim,

²O conceito de fatorial não é só para números inteiros. Ele pode ser estendido a qualquer número racional através da *função gama* ou *função fatorial* (isto veremos no Capítulo VII). Também, $0!=1$ não é uma definição e isto é provado (e também será visto).

$$\begin{aligned}
\lim_{u \rightarrow 0} \frac{(a+u)^{10} - a^{10}}{u} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{a^{10} + 10a^9u + \dots - a^{10}}{u} \\
&= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{10a^9u + \dots}{u} \\
&= 10a^9
\end{aligned}
\tag{II.29}$$

Na primeira passagem acima, não escrevi todos os termos do desenvolvimento pois sei que são desprezíveis quando $u \rightarrow 0$.

Exemplos envolvendo as outras formas de indeterminação aparecerão quando estudarmos outros tipos de função.

Exercícios

1. Calcular os seguintes limites ³:

- (a) $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t+3}{t+2}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x+2}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x-2}$
- (d) $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y+1}{y^2+1}$
- (e) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 - 2t + 3}{2t^2 + 5t - 3}$
- (f) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20}$
- (g) $\lim_{r \rightarrow a} \frac{r^3 - ar^2 - a^2r + a^3}{r^2 - a^2}$
- (h) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x} - \sqrt{12-x}}{2x - 3\sqrt{19-5x}}$
- (i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^9 - 1}{x-2}$
- (j) $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^3 - 8}{t^2 + t - 6}$

³Os exercícios marcados com asterisco encontram-se resolvidos no Apêndice E. Eles não são necessariamente os mais difíceis. Acho importante que você tente resolvê-los antes de olhar a solução.

2*. Mostre que a relação (II.27) é válida para $n + 1$, isto é, mostre que

$$\begin{aligned}(a + b)(a + b)^n &= (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k\end{aligned}$$

Capítulo III

Derivadas

1. Conceito de derivada

Como foi dito no Capítulo I, a derivada de uma função está relacionada à inclinação da curva em cada ponto. Vejamos como a derivada é obtida. Seja a Figura III.1. Ela corresponde à representação gráfica de uma certa função $f(x)$ versus x . Consideremos a quantidade

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\text{III.1})$$

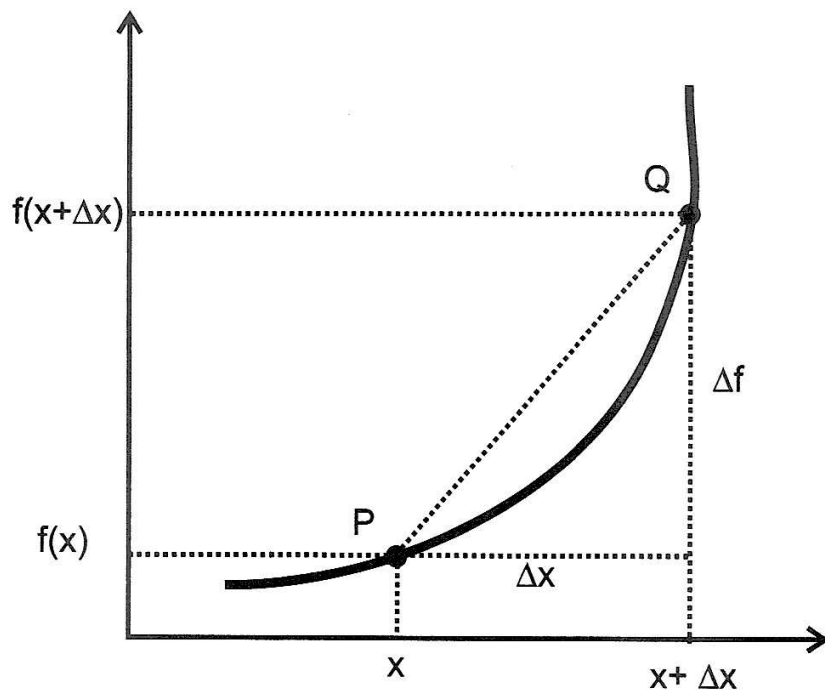


Figura III.1: Gráfico de uma certa função de x versus x

Ela nos dá a razão entre a variação de $f(x)$ e a correspondente variação de x . Esta é uma quantidade média, pois, por hipótese, estamos admitindo que $f(x)$ não varia linearmente com x para todos os pontos do intervalo Δx . Já para a reta que vai de P a Q esta variação é constante.

Observe agora a Figura III.2. O ângulo α é a inclinação da reta tangente à curva no ponto P e o ângulo β é a inclinação da reta que passa por P e Q . Vemos, então, que a quantidade dada pela expressão (III.1) é justamente a tangente do ângulo β ,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\text{III.2})$$

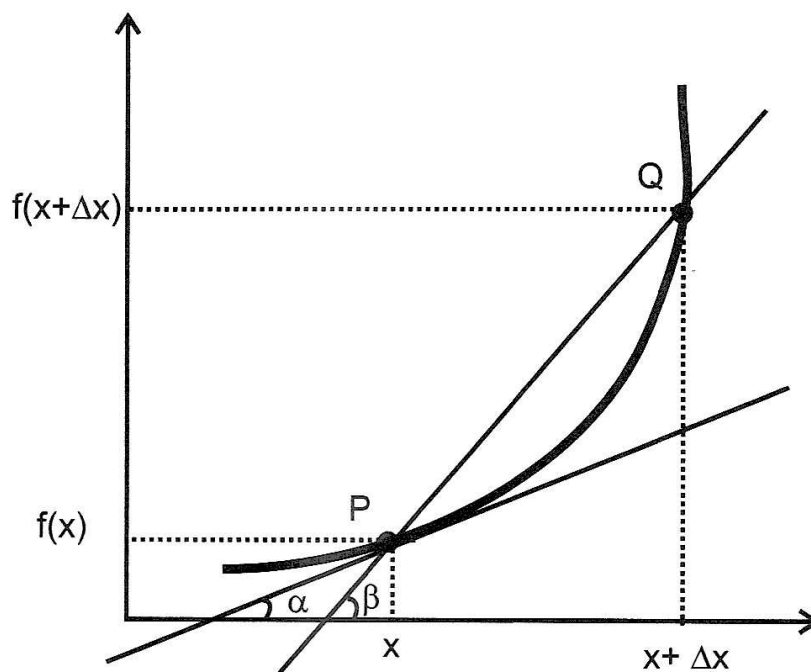


Figura III.2: Inclinações das retas $\overline{PQ}$ e da reta tangente em P

Se formos aproximando o ponto Q de P , notamos que a reta que passa por PQ vai se aproximando da tangente no ponto P . As duas retas coincidirão no caso limite de Q coincidir com P . Assim, podemos dizer que a tangente do ângulo α é dada por

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad (\text{III.3})$$

Na relação acima não há problemas de divergência com o denominador tendendo a zero, pois o numerador tende a zero também (estaremos sempre usando funções contínuas). Assim, a relação (III.3) dá o símbolo de indeterminação $\frac{0}{0}$. Pela experiência já adquirida no capítulo anterior, não há problema algum nisto. É justamente este limite que é chamado de **derivada de $f(x)$ em relação a x** . Ela é comumente representada por $f'(x)$ ou df/dx , onde, nesta última notação, df e dx podem ser vistos como variações infinitesimais. Assim, podemos escrever que a derivada de $f(x)$ em relação a x é

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\text{III.4})$$

Vejamos um exemplo. Seja a função

$$f(x) = x^2 \quad (\text{III.5})$$

Usando a relação (III.4), temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) \\ &= 2x \end{aligned} \tag{III.6}$$

Na primeira linha de (III.6) aparece o símbolo de indeterminação $\frac{0}{0}$, mas na segunda linha o problema da indeterminação foi resolvido com a simplificação do fator Δx . Assim, $2x$ é a derivada da função $f(x) = x^2$ em relação a x . Podemos dizer, por exemplo, que no ponto $x = \frac{1}{2}$ a derivada da função $f(x) = x^2$ vale 1 (o que significa, geometricamente, que a inclinação da curva neste ponto é 45° , pois $\text{tg } 45^\circ = 1$). É interessante notar que no ponto $x = 0$, ponto em que a função passa por um mínimo, a inclinação é zero. É fácil perceber que nos pontos de máximo e mínimo da função a derivada é sempre zero. Esta é uma conclusão importante e que será bastante usada nas aplicações. A minha opinião é que não é conveniente, agora, partir para as aplicações. Acho que devemos dedicar algum tempo familiarizando-nos com essas novas ideias. Assim, sugiro que vocês façam o exercício 1.

2. Derivada de funções de potência – Caso geral

O cálculo da derivada de qualquer função pode ser feito através da sua definição, dada por (III.4) (é este justamente o objetivo do exercício 1 - sugerido acima). Entretanto, a dedução de algumas relações [para tal usa-se a mesma expressão (III.4)] pode facilitar o trabalho algébrico em muitos casos. É isto que começaremos a ver nesta seção, no qual trataremos do caso geral das funções de potência [na seção anterior vimos, como exemplo, o caso particular de $f(x) = x^2$].

Seja, então, a função

$$f(x) = x^n \tag{III.7}$$

no qual n pode ser qualquer número racional. Assim, pela relação (III.4), temos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \tag{III.8}$$

Usaremos aqui a expansão binomial deduzida no Capítulo II, dada por (II.27). Observe que não há necessidade de se escrever todos os termos da expansão. Bastam os dois primeiros pois os outros desaparecerão ao fazer o limite $\Delta x \rightarrow 0$ [veja as passagens para obtenção de (III.6)].

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n + n x^{n-1} \Delta x + \dots - x^n}{\Delta x} \\ &= n x^{n-1} \end{aligned} \tag{III.9}$$

O resultado (III.9) é a derivada do caso geral de uma função de potência, dada por (III.7). Observe como a derivada de $f(x) = x^2$, obtida na seção anterior, é um caso particular da expressão acima. Para destacar o resultado encontrado, deixe-me escrevê-lo novamente de forma isolada

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1} \quad (\text{III.10})$$

Esta será a única fórmula de derivada que usaremos neste e nos dois capítulos seguintes (como disse, neste livro não há muito enfoque para o uso de fórmulas - pelo menos de maneira inconsequente).

3. Regra da cadeia de derivação

O que veremos nesta seção não está restrito ao caso de funções de potência. É uma técnica geral e que facilita o processo de derivação (e também de integração).

Tomemos o seguinte exemplo. Suponha que nos seja pedido para calcular a derivada da função

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad (\text{III.11})$$

Esta é a letra (b) do exercício 1 que você já deve ter resolvido, usando diretamente a relação (III.4). Vamos tentar, aqui, usar a relação (III.10) que acabamos de deduzir. Para fazer isto, podemos reescrever (III.11) como

$$f(u) = \sqrt{u} \quad (\text{III.12})$$

em que $u = x^2 + 1$. Observando (III.10) e (III.12), e tendo em conta que $\sqrt{u} = u^{1/2}$, diretamente calculamos a derivada de $f(u)$ com respeito a u . Para deixar claro sobre qual variável estamos tomando a derivada, vamos usar a notação $\frac{df}{du}$ (geralmente na notação f' fica subentendido que a derivada é em relação a x). Assim,

$$\begin{aligned} \frac{df}{du} &= \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}-1} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

Embora tenhamos apresentado o resultado final como uma função de x , ele não é a derivada de f em relação a x , é em relação a u (o resultado acima não deve ter coincidido com o que você encontrou na resolução do exercício 1b).

Como calcular então a derivada de f em relação a x ? O problema que temos é algo que vai aparecer muitas vezes (mas muitas vezes mesmo). Vamos tratá-lo

de forma geral. Consideremos que se tenha uma função $f(u)$ (não necessariamente o nosso caso particular $\sqrt{u}$) e u sendo uma função de x (também, não necessariamente $x^2 + 1$). Queremos saber qual é a derivada de f em relação a x . A solução do problema é bem simples.

$$\begin{aligned}
 \frac{df}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
 &= \frac{df}{du} \frac{du}{dx}
 \end{aligned} \tag{III.14}$$

Na segunda linha multiplicou-se e dividiu-se por Δu . Na terceira, usamos o fato de estarmos sempre considerando funções contínuas (quando $\Delta x \rightarrow 0$, temos que $\Delta u \rightarrow 0$ também). A passagem da terceira para a quarta linha corresponde ao uso direto da definição de derivada.

A relação (III.14) está nos dizendo que a derivada de uma função $f(u)$ (na qual u é uma função de x) em relação a x é a derivada de f em relação a u vezes a derivada de u em relação a x . Esta relação é conhecida como **regra da cadeia**.

Aplicando-a ao nosso exemplo inicial, temos que a derivada da função $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ em relação a x é dada por

$$\begin{aligned}
 \frac{df}{dx} &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} 2x \\
 &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}
 \end{aligned} \tag{III.15}$$

Estava faltando multiplicar (III.13) por $\frac{du}{dx} = 2x$ (este resultado deve ser o que você encontrou ao resolver o exercício 1b).

4. Mais algumas regras de derivação

Existem ainda algumas outras regras de derivação que são úteis no cálculo de derivadas (também com validade geral para qualquer tipo de função). Vou listá-las a seguir.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f_1(x) + f_2(x) \\
 \Rightarrow f'(x) &= f'_1(x) + f'_2(x)
 \end{aligned} \tag{III.16}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \text{constante} \\
 \Rightarrow f'(x) &= 0
 \end{aligned} \tag{III.17}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x) h(x) \\
\Rightarrow f'(x) &= g'(x)h(x) + g(x)h'(x)
\end{aligned} \tag{III.18}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{g(x)}{h(x)} \\
\Rightarrow f'(x) &= \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h^2(x)}
\end{aligned} \tag{III.19}$$

A demonstração da primeira, que temos usado de forma intuitiva, é imediata. É consequência direta das propriedades de limite. A da segunda também, pois se $f = \text{constante}$, $\Delta f = 0$. Vamos demonstrar a terceira. Temos que Δf é dado por

$$\begin{aligned}
\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) \\
&= g(x + \Delta x)h(x + \Delta x) - g(x)h(x)
\end{aligned}$$

Somemos e subtraímos a quantidade $g(x)h(x + \Delta x)$ na relação acima e agrupamos convenientemente os termos

$$\begin{aligned}
\Delta f &= g(x + \Delta x)h(x + \Delta x) - g(x)h(x) \\
&\quad \pm g(x)h(x + \Delta x) \\
&= [g(x + \Delta x) - g(x)]h(x + \Delta x) \\
&\quad + g(x)[h(x + \Delta x) - h(x)]
\end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados por Δx e tomando o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$, vem

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} h(x + \Delta x) \\
&\quad + g(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\
&= g'(x)h(x) + g(x)h'(x)
\end{aligned}$$

que é a expressão (III.18). Fica como um exercício a demonstração de (III.19) [que pode ser feita diretamente ou considerando (III.19) como caso particular de (III.18)].

5. Um exemplo para finalizar o capítulo

Vamos supor que seja pedido a você para calcular a derivada $\frac{dy}{dx}$ de $x^2 + y^2 = 5$. Naturalmente, você poderia escrever $y = \sqrt{5 - x^2}$ ou $(y = -\sqrt{5 - x^2})$ e proceder ao cálculo da derivada seguindo passos semelhantes ao do exemplo (III.11), apresentado no início da seção 3.

Entretanto, tal procedimento de explicitar y em termos de x não é necessário (às vezes pode não ser conveniente nem mesmo fácil de ser feito). Observe que até no caso do exemplo apresentado, para sermos corretos, teríamos de considerar tanto $y = \sqrt{5 - x^2}$ como $y = -\sqrt{5 - x^2}$, pois ambos estão contidos na expressão inicial.

O cálculo da derivada $\frac{dy}{dx}$ de $x^2 + y^2 = 5$ está sendo pedido na letra (a) do exercício 5. Vou deixá-lo para vocês resolverem. Prefiro considerar um exemplo mais geral. Seja a relação

$$y^4 + 5xy^3 + xy + 8x^2 = 8 \quad (\text{III.20})$$

Observe que tentar explicitar y em termos de x neste caso não é das tarefas mais simples. Vamos, então, proceder ao cálculo de $\frac{dy}{dx}$ partindo diretamente de (III.20). Temos, então (aplicação elementar da regra da cadeia e de algumas relações vistas nas seções anteriores),

$$\begin{aligned} 4y^3 \frac{dy}{dx} + 5y^3 + 15xy^2 \frac{dy}{dx} + y + x \frac{dy}{dx} + 16x &= 0 \\ \Rightarrow (4y^3 + 15xy^2 + x) \frac{dy}{dx} &= -5y^3 - y - 16x \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= -\frac{5y^3 + y + 16x}{4y^3 + 15xy^2 + x} \end{aligned}$$

Exercícios

1. Usando diretamente a definição de derivada, dada por (III.4), calcular a derivada das seguintes funções

- (a) $y = \sqrt{x}$
- (b*) $y = \sqrt{x^2 + 1}$
- (c) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$
- (d) $y = x^3$
- (e) $y = x\sqrt{x+1}$
- (f) $y = \frac{1}{x+1}$
- (g) $y = \frac{1}{x^2+1}$

2. Demonstrar a relação (III.19).

3. Calcular a derivada das funções abaixo com respeito às variáveis indicadas

$$(a) \quad y = \frac{2-x}{1+4x^3}$$

$$(b) \quad r = \frac{\sqrt[3]{2+\theta}}{\theta}$$

$$(c) \quad y = x^3\sqrt{5-4x}$$

$$(d) \quad s = \sqrt{t - \frac{3}{t^2}}$$

$$(e) \quad y = \frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt[4]{1+3x^2}}$$

$$(f) \quad s = \sqrt[3]{\frac{1+t}{1-t}}$$

4. Calcular as derivadas do exercício 1 usando as regras de derivação que estudamos neste capítulo.

5. Calcular $\frac{dy}{dx}$ das seguintes funções

$$(a^*) \quad x^2 + y^2 = 5$$

$$(b) \quad x^2y^2 = x^2 + y^2$$

$$(c) \quad 2xy + y^2 = x + y$$

$$(d) \quad x^3 - xy + y^3 = 1$$

$$(e) \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

$$(f) \quad (x+y)^3 + (x-y)^3 = x^4 + y^4$$

Capítulo IV

Aplicações de derivada

São muitas as possíveis aplicações de derivadas. Neste capítulo veremos algumas e deixaremos várias outras para serem feitas como exercícios. Acredito que, ao terminar de estudar o presente capítulo, teremos uma visão bastante ampla sobre a importância das derivadas. Isto facilitará também a apresentação de integrais, o que ocorrerá no capítulo seguinte. Esta sequência de apresentação dos assuntos contraria um pouco a ordem usualmente apresentada nos livros textos de Cálculo, nos quais derivadas e integrais são tratadas quase como assuntos distintos. Aliás, ainda aqui mesmo, no presente capítulo, veremos alguns exemplos que normalmente só são apresentados após o estudo formal de integrais.

1. Um exemplo prático do uso de derivada

Suponha que você tenha uma placa quadrada de lado 3 m e deseja construir um recipiente (sem tampa). Para tal, você corta um quadrado de lado x em cada vértice da placa, como mostra a Figura IV.1, e forma uma caixa como aparece na Figura IV.2. Queremos saber qual deve ser o tamanho do quadrado a ser cortado a fim de que a caixa tenha um volume máximo.

Observando a caixa da Figura IV.2, vemos que o seu volume é dado por

$$V = (3 - 2x)^2 x \tag{IV.1}$$

Como podemos ver, a expressão do volume é uma função de x . Daqui para a frente, o tratamento é matemático. Podemos usar o que sabemos sobre funções sem nenhuma restrição. Assim, como falamos no capítulo anterior, nos pontos de máximo e mínimo a derivada é zero. Então, o que temos de fazer é calcular a derivada da função dada por (IV.1), com respeito a x , e igualar a zero.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= 2(3 - 2x)(-2)x + (3 - 2x)^2 \\ &= 3(3 - 2x)(1 - 2x) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{IV.2}$$

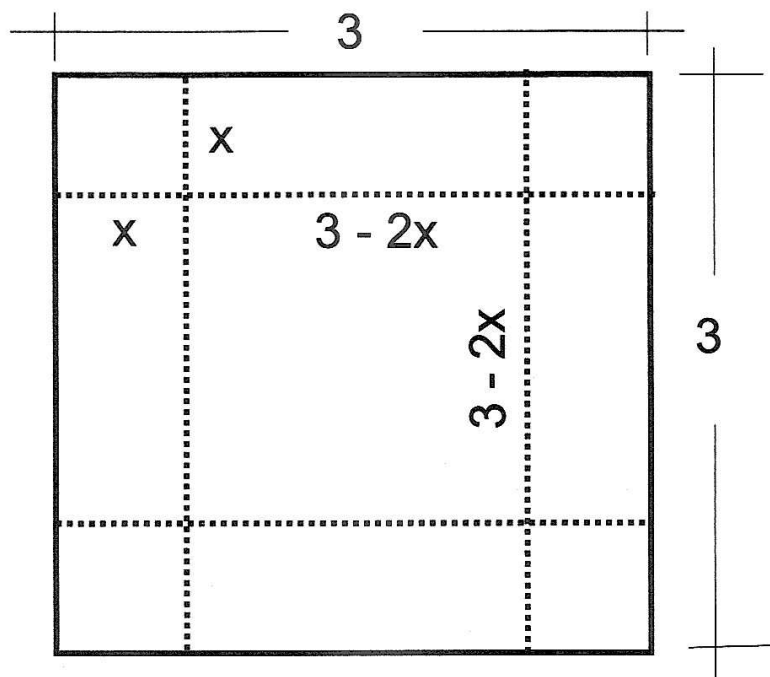


Figura IV.1: Vista da placa com os pedaços para cortar

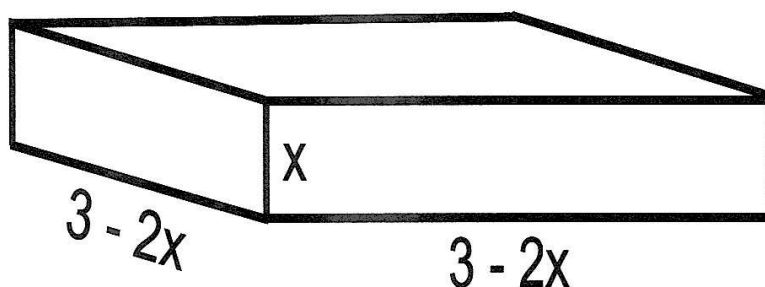


Figura IV.2: Formato do recipiente

Há dois valores de x que satisfazem à relação (IV.2), $x = 1,5\text{ m}$ e $x = 0,5\text{ m}$. O primeiro corresponde ao mínimo valor de V , pois, como podemos observar, para $x = 1,5\text{ m}$, $V = 0$. Consequentemente, como depois de um mínimo só pode vir um máximo (caso de funções contínuas), o valor que estamos procurando é o segundo. Ou seja, o recipiente é um paralelepípedo de base quadrada de lado 2 m e altura de $0,5\text{ m}$.

A questão que pode estar passando pela cabeça de vocês é a seguinte: Não há dúvidas de que nos máximos e mínimos a derivada é zero (pois a tangente à curva nesses pontos é paralela ao eixo dos x e, consequentemente, a inclinação dessas retas é zero). Entretanto, a identificação de máximos e mínimos, num caso geral, sempre pode ser feita com essa facilidade?

A resposta é não. Se o nosso objetivo fosse apenas a discussão do exemplo acima, o problema estaria totalmente resolvido. Há muitos exemplos em que isto realmente acontece, ou seja, os máximos e mínimos são identificados com facilidade. Assim, quando este for o caso, não há porque ficar usando aparatos mais complicados. Vamos ver como podemos identificar, num caso geral, se um ponto, no qual a derivada é zero, corresponde a máximo ou mínimo.

Há duas maneiras de se fazer isto (que estão relacionadas entre si). É fácil observar que num ponto de mínimo, a derivada antes do ponto é negativa (a inclinação é maior que 90°) e, depois, é positiva (a inclinação é menor que 90°) (isto para valores não muito distantes do ponto considerado). Para os pontos de máximo, ocorre o contrário (veja Figura IV.3).

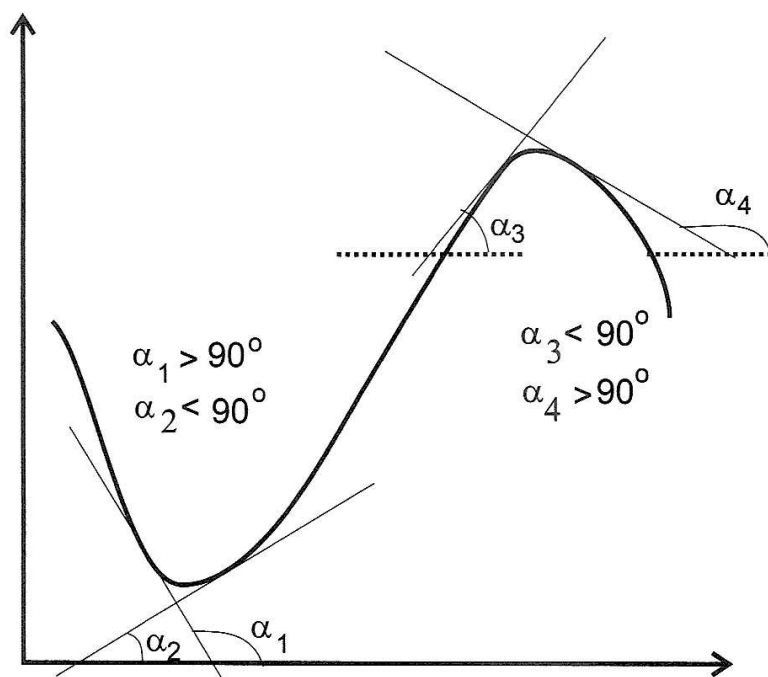


Figura IV.3: Inclinação antes e depois dos máximos e mínimos

Podemos verificar isto no nosso próprio exemplo, olhando para a penúltima linha de (IV.2). Concentrando no ponto $x = 0,5$ (que é o primeiro valor que anula dV/dx), temos que para $x < 0,5$; $\frac{dV}{dx} > 0$ (de fato, tomando $x = 0$, por exemplo, temos $\frac{dV}{dx} = 9$). Para valores à direita de $x = 0,5$; a derivada é negativa (tomando $x = 1$, temos $\frac{dV}{dx} = -3$). Verifique você mesmo que $x = 1,5$ corresponde a mínimo¹.

A outra maneira de verificar se determinado ponto, que anula a derivada, corresponde a máximo ou mínimo está diretamente relacionada ao mesmo processo acima. Consideremos o caso de mínimo. Vimos que na vizinhança antes do ponto a derivada é negativa, e depois, positiva. Assim, a função derivada (a derivada de uma função é uma outra função) é uma função crescente no entorno do mínimo (revisando – antes do mínimo ela é negativa, no mínimo é zero e depois é positiva). Consequentemente, a derivada da derivada da função (segunda derivada), é uma quantidade positiva no ponto de mínimo. O inverso ocorre nos pontos de máximo.

Aqui, novamente, vamos usar esta análise no nosso exemplo. A segunda

¹Dissemos acima que nesta análise de máximos e mínimos os pontos considerados não podem estar muito distantes. Isto é algo mais ou menos claro. No caso do exemplo discutido, para os pontos à direita de $x = 0,5$, notamos que podemos tomar qualquer ponto desde que não esteja além de $x = 1,5$ (que é o outro ponto extremo do problema). Por isto é que tomamos $x = 1$.

derivada da função (IV.1), é dada por (na notação, podemos usar V'' ou $\frac{d^2V}{dx^2}$)²

$$\begin{aligned}\frac{d^2V}{dx^2} &= -6(1-2x) + (3-2x)(-6) \\ &= 24(x-1)\end{aligned}\tag{IV.3}$$

De fato, para $x = 0,5$; $V'' = -12 < 0$ e para $x = 1,5$; $V'' = 12 > 0$.

Qual dos dois processos é mais conveniente de ser usado? Depende. Às vezes a função inicial é tal, que o cálculo da derivada segunda pode ser muito tedioso. Neste caso, pode ser que a verificação dos sinais da derivada primeira, antes e depois do ponto que corresponde ao extremo da função, seja mais conveniente. Se o cálculo da derivada segunda for algo simples, talvez este seja o processo mais indicado. Entretanto, o melhor critério é verificar, pela natureza do problema, se os máximos e mínimos podem ser identificados com facilidade (como fizemos inicialmente no nosso exemplo).

Para finalizar esta seção, façamos três observações:

(i) A primeira refere-se aos chamados **pontos de inflexão**. Estes são pontos onde a curva muda de concavidade (eles ficam entre um máximo e um mínimo). Não é difícil perceber que nestes pontos a segunda derivada é zero (por quê?). No caso do nosso exemplo, este ponto está em $x = 1$.

(ii) É fácil observar que podem existir pontos de inflexão em que a primeira derivada é também zero.

(iii) Embora tenhamos dito que nos máximos e mínimos a primeira derivada é zero, isto não quer dizer que o inverso seja verdadeiro. Nos pontos limites do problema, a função pode tender para um valor máximo ou mínimo sem, necessariamente, que a primeira derivada seja zero. Por exemplo, na expressão da parábola $y = x^2$ (veja o primeiro exemplo discutido no Capítulo anterior), o mínimo é em $x = 0$ (observe que, realmente, $y' = 0$ para este valor de x). Entretanto, o valor máximo (infinito) ocorre para $x \rightarrow \pm\infty$ (e a primeira derivada não é zero nesses pontos).

Para você ganhar familiaridade nessa questão de máximos, mínimos e pontos de inflexão, procure resolver todos os itens do exercício 1.

2. Exemplo de geometria

Consideremos um círculo de centro na origem cuja equação é dada por

$$x^2 + y^2 = 5\tag{IV.4}$$

²A notação $\frac{d^2V}{dx^2}$ para derivada segunda de V (e não $\frac{dV^2}{dx^2}$) faz sentido, pois corresponde ao operador $\frac{d}{dx}$ atuando duas vezes sobre V , isto é

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} \right)^2 V$$

O nosso objetivo será calcular as equações das retas tangentes ao círculo nos pontos em que $x = 1$ (é fácil ver que há dois pontos, um com $y = 2$ e outro com $y = -2$). Veja Figura IV.4, na qual chamamos de P e Q os pontos de tangência.

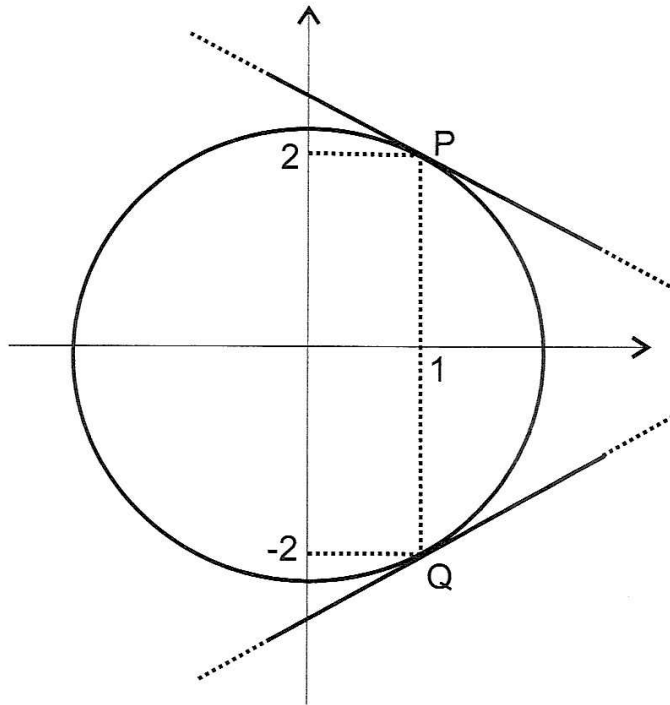


Figura IV.4: Círculo com retas tangentes em P e Q

O raciocínio a ser seguido é simples. Os pontos de tangência pertencem à reta e ao círculo, e a inclinação da reta e do círculo, nestes pontos, é a mesma. Com estes dois dados é possível calcular os dois parâmetros da equação da tangente.

Seja, então, a equação geral de uma reta (depois especificamos qual dos dois pontos estamos considerando),

$$y = ax + b \quad (\text{IV.5})$$

A inclinação da reta é o próprio a , pois de (IV.5) temos

$$\frac{dy}{dx} = a \quad (\text{IV.6})$$

Para calcular a inclinação do círculo, podemos partir diretamente da expressão (IV.4). Não há necessidade de explicitar y em termos de x , como $y = \sqrt{5 - x^2}$ (veja a Seção 5 do capítulo anterior).

$$\begin{aligned} 2x + 2y \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

Vamos nos concentrar no ponto $P(1, 2)$. A inclinação vale $-\frac{1}{2}$ (que é portanto o valor do parâmetro a da reta tangente). Para calcular b , usamos o fato de o ponto P também satisfazer à equação da reta. Diretamente encontraremos que $b = 5/2$. Portanto, a equação da reta, tangente no ponto P , é dada por

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \quad (\text{IV.8})$$

De forma semelhante calculamos a equação da reta tangente no ponto Q . O resultado é

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \quad (\text{IV.9})$$

3. Um exemplo de Física Básica

Seja um projétil lançado do topo de um edifício de altura h com velocidade inicial de módulo v_0 e fazendo um ângulo θ com a horizontal, como mostra a Figura IV.5. O nosso objetivo será primeiro calcular o alcance A e, depois, falar sobre o ângulo θ para que o alcance seja máximo (se você pensou em 45° , pode esquecer, não é este o caso).

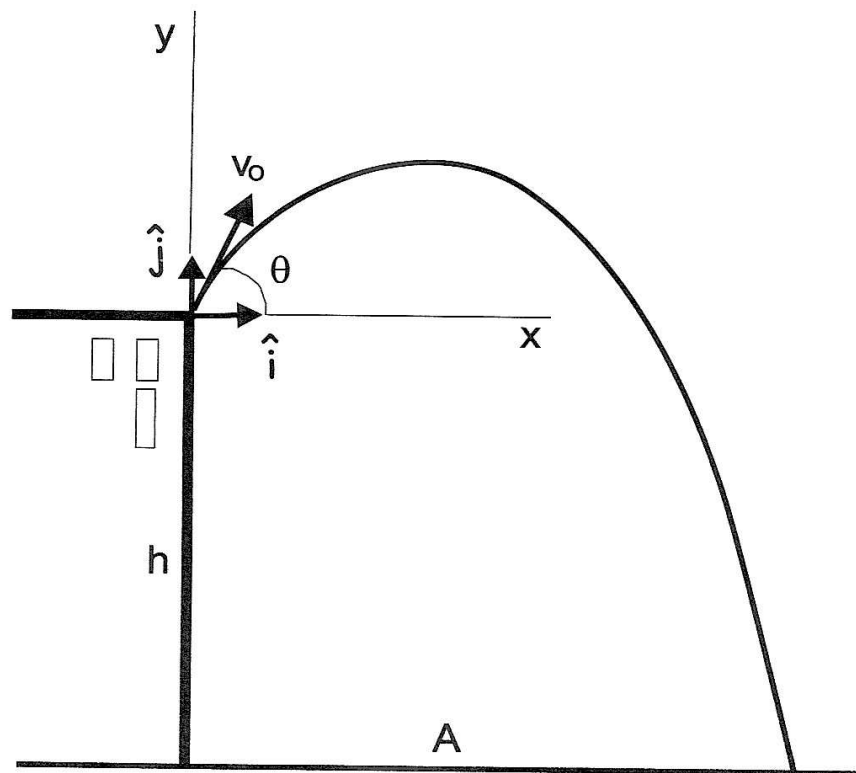


Figura IV.5: Projétil lançado do topo de um prédio

Provavelmente vocês já resolveram exercícios parecidos com este no segundo grau e consigam resolver este também (pelo menos para o cálculo do alcance) com o uso de algumas fórmulas.

Este procedimento de substituir a Física por um conjunto de fórmulas (às vezes de forma exagerada) pode levar a uma visão errada sobre o que seja

realmente o estudo da Física. O correto seria partir não de um conjunto de fórmulas (às vezes com dezenas delas), mas das leis físicas correspondentes. No caso do nosso exemplo, um problema de mecânica, deveríamos partir das leis de Newton. Entretanto, é justamente aí que reside a grande dificuldade. As leis físicas são normalmente expressas por equações envolvendo derivadas (equações diferenciais). É por isso que o estudo da Física no segundo grau acaba sendo um pouco deturpado (às vezes muito), pois não se sabe a matemática necessária para fazer o desenvolvimento a partir dessas equações. Como este não é mais o nosso caso, vamos resolver o problema proposto partindo diretamente das leis Físicas (faremos isto várias outras vezes neste livro).

Não vamos entrar em detalhes sobre a questão de referenciais inerciais (que está no conteúdo da primeira lei de Newton) nem na questão das ações e reações (terceira lei). Vamos dizer apenas que o movimento dos corpos (não relativísticos nem quânticos) é regido pela segunda lei de Newton. Vou escrevê-la abaixo numa forma bem conhecida por vocês

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad (\text{IV.10})$$

É importante destacar que $\vec{F}$ é a **força resultante** de todas as forças que atuam sobre o corpo. As demais quantidades são: m , massa do corpo e $\vec{a}$, aceleração, definida por

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (\text{IV.11})$$

em que $\vec{v}(t)$ e $\vec{r}(t)$ são a velocidade e posição do corpo no instante t (relacionadas a um ponto qualquer da trajetória).

Para se usar a lei de Newton, é necessário, portanto, o conhecimento de todas as forças que atuam sobre o corpo. No presente caso só há a força gravitacional (estamos desprezando a força proveniente do atrito com o ar). A expressão desta força é conhecida, chamada lei da gravitação (também devida a Newton), e é dada por (como ela é a própria resultante, vamos representá-la com a mesma letra $\vec{F}$)

$$\vec{F} = m \vec{g} \quad (\text{IV.12})$$

em que $\vec{g}$ é o campo gravitacional no ponto onde está o corpo. No nosso caso (movimento próximo à superfície da Terra), este valor pode ser tomado como constante (cujo módulo dá algo próximo a 10 m/s^2). Entretanto, devemos estar atentos porque isto só ocorre para regiões onde a altura em relação à superfície da Terra é desprezível perante o seu raio (o que não é o caso, por exemplo, do movimento de satélites). Considerando a orientação dos unitários especificados na figura (veja Apêndice A), temos que

$$\vec{F} = -mg\hat{j} \quad (\text{IV.13})$$

Não vamos substituir g por nenhum número. Fica apenas subentendido que, no presente caso, ele é uma quantidade constante.

Combinando (IV.10) e (IV.13), e usando a definição de aceleração dada por (IV.11), vem

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -g\hat{j} \quad (\text{IV.14})$$

Como $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ temos que (IV.14) fornece duas relações (no meu livro de Mecânica, este problema é tratado até o final dentro da notação vetorial)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \quad (\text{IV.15})$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -g \quad (\text{IV.16})$$

Temos acima duas equações em que as incógnitas são x e y . Como as variáveis aparecem dentro dos sinais de derivação, elas são chamadas de equações diferenciais. A solução dessas equações no presente caso é bem simples. Na primeira, temos que a variável x é algo que derivando duas vezes com respeito a t dá zero. A solução geral só pode ser

$$x = c_1 t + c_2 \quad (\text{IV.17})$$

na qual c_1 e c_2 são quantidades constantes, cujos significados serão vistos mais adiante [o importante a ser observado é que, realmente, x dado por (IV.17) satisfaz à equação (IV.15) e não há outra mais geral que ela]. Da mesma forma, não é difícil concluir que a solução de (IV.16) é

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + c_3 t + c_4 \quad (\text{IV.18})$$

em que c_3 e c_4 são outras constantes.

Pode ser que algum de vocês já tenha estudado Cálculo e esteja agora com a seguinte dúvida: O que foi feito acima não é uma integração? A resposta é não. O que fizemos acima foi resolver uma equação diferencial. Nem sempre uma equação diferencial pode ser colocada na forma de uma integral (falaremos mais sobre isto no Capítulo V, quando, de fato, estudaremos as integrais e no Apêndice C, que mostraremos um outro exemplo de solução de equação diferencial).

Como disse, as soluções dadas por (IV.17) e (IV.18) são as soluções gerais de (IV.15) e (IV.16) respectivamente. Vamos agora adaptar essas soluções ao nosso problema (isto é feito identificando as constantes com os parâmetros do problema). Primeiramente, notamos que de acordo com a origem dos eixos coordenados que estamos usando, quando $t = 0$, x e y são nulos também (o corpo partiu da origem). Usando esta condição em (IV.17) e (IV.18), temos que as constantes c_2 e c_4 têm de ser zero. Da mesma forma, derivando-se (IV.17) e (IV.18) com respeito ao tempo, vemos $c_1 = v_o \cos \theta$ (a componente horizontal da velocidade é constante) e $c_3 = v_o \sin \theta$ (componente vertical da velocidade em

$t = 0$). Substituindo todos esses valores nas relações iniciais (IV.17) e (IV.18), obtemos

$$x = (v_o \cos \theta) t \quad (\text{IV.19})$$

$$y = (v_o \sin \theta) t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (\text{IV.20})$$

que devem ser relações conhecidas de vocês. Pela Figura IV.4, vemos que $x = A$ (alcance) quando $y = -h$. Substituindo esses resultados acima e eliminando o tempo entre as duas expressões, obtemos (após um pequeno trabalho algébrico)

$$A = \frac{v_o \cos \theta}{g} \left(v_o \sin \theta + \sqrt{v_o^2 \sin^2 \theta + 2gh} \right) \quad (\text{IV.21})$$

que é a expressão do alcance. Notamos que ela depende do ângulo θ (como não poderia deixar de ser).

Observe que só no caso de $h = 0$ (que corresponderia ao corpo lançado da superfície e não do topo do prédio) é que temos

$$\begin{aligned} A &= \frac{2v_o^2 \sin \theta \cos \theta}{g} \\ &= \frac{v_o}{g} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (\text{IV.22})$$

Neste caso particular (e só neste caso), o alcance será máximo quando $\sin 2\theta$ for máximo (isto é, igual a 1). Isto corresponde, então, a $2\theta = 90^\circ$ e, conseqüentemente, a $\theta = 45^\circ$ (um resultado bem conhecido de vocês).

Para o caso do corpo lançado de uma altura h , a expressão do alcance é dada por (IV.21) e o alcance máximo não acontece mais para $\theta = 45^\circ$. Para saber qual θ que corresponde a A máximo, devemos proceder como no cálculo de máximos e mínimos de qualquer função, isto é, devemos procurar a condição para que

$$\frac{dA}{d\theta} = 0 \quad (\text{IV.23})$$

Este é um daqueles exemplos em que não há dúvidas de que o resultado só pode corresponder a um máximo, pois o valor mínimo para o alcance é zero (que, como podemos ver diretamente na Fig. IV.5, corresponde a $\theta = 90^\circ$).

Entretanto, para desenvolver o cálculo relacionado à expressão (IV.23), precisamos do conhecimento de derivadas de funções trigonométricas (que será estudado no Capítulo VI). Deixemos, então, para fazer este desenvolvimento quando chegarmos lá. Caso você já saiba derivada de funções trigonométricas

(mais especificamente de seno e cosseno), não precisa esperar pela gente. Procure desenvolver o cálculo acima e mostre que o alcance será máximo quando

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{gh}{v_o^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{IV.24})$$

Note, mais uma vez, que $\operatorname{sen} \theta$ só é igual a $\sqrt{2}/2$ (que corresponde a $\theta = 45^\circ$) se $h = 0$.

Exercícios

1. Calcular os pontos de máximo, mínimo e inflexão das seguintes funções

- (a) $y = 6 - 2x - x^2$
- (b) $y = 12 - 12x + x^3$
- (c) $y = x^3 - 3x^2 + 2$
- (d) $y = 2x^2 - 4x + 3$
- (e) $y = x^4 - 32x + 48$
- (f) $y = x^2 + \frac{2a^3}{x}$
- (g) $y = \frac{ax}{x^2 + a^2}$
- (h) $y = b + c(x - a)^{\frac{2}{3}}$
- (i) $y = (2 + x)^{\frac{1}{3}}(1 - x)^{\frac{2}{3}}$
- (j) $y = \frac{(x - a)(b - x)}{x^2}$

Em que a , b e c são constantes. Para identificação dos máximos e mínimos use o processo que julgar mais conveniente.

2. Considere $a = t^2 - 1$ a aceleração de uma partícula movimentando-se sobre o eixo x .

- (a) Sabendo-se que em $t = 0$, $v = 0$ e $x = 1$, calcular $v(t)$ e $x(t)$.
- (b) Em que pontos a partícula para?
- (c) Em que regiões ela se movimenta no sentido positivo do eixo x ? Idem para o sentido negativo.

3. Mostre que a reta $y = -x$ é tangente à curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Achar o ponto de tangência. Idem para a reta $y = 9x - 15$ e a curva $y = x^3 - 3x + 1$.

4. Achar dois números cuja soma é 20 e o produto do quadrado de um com o triplo do outro dá o maior valor possível.

5. Deseja-se construir um recipiente de forma cilíndrica para conter um certo volume. Qual o relacionamento entre a altura e o raio da base que proporcionarão uma maior economia de material para

- (a) caso sem tampa?
- (b) caso com tampa?

6. Considere que você tenha um fio de comprimento l .

- (a) Quais as dimensões do retângulo de maior área que é possível formar com este fio?
- (b) Idem para o caso de um triângulo isósceles.
- (c*) Idem para um triângulo retângulo.

7. Deseja-se construir uma caixa de madeira, sem tampa, com capacidade para 108 cm^3 . O fundo deve ser um quadrado. Quais as dimensões da caixa para que o custo seja mínimo? Repetir para o caso com tampa.

8. Obter a equação da reta tangente à curva

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x} \quad (\text{cissóide})$$

no ponto de coordenada $x = a$.

9. Idem para as curvas

$$(a) \quad y = x^3 - 3x \quad \text{em} \quad x = 2$$

$$(b) \quad y = \frac{2x + 1}{3 - x} \quad \text{em} \quad x = 2$$

$$(c) \quad 2x^2 - xy + y^2 = 16 \quad \text{em} \quad x = 3$$

$$(d) \quad y^2 + 2y - 4x + 4 = 0 \quad \text{em} \quad x = 1$$

$$(e) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{elipse}) \quad \text{em} \quad x = 1$$

10. Achar os ângulos de interseção entre cada um dos seguintes pares de curva

$$(a) \quad y^2 = x + 1 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = 13$$

$$(b) \quad y^2 = 6 - x^2 \quad \text{e} \quad 7x^2 + y^2 = 32$$

11. Achar as dimensões do retângulo de área máxima que pode ser inscrito num círculo de raio 5 cm .

12. Achar a altura do cone de máximo volume que pode ser inscrito numa esfera de raio R .

13. O *Princípio de Fermat*, também chamado de princípio do tempo mínimo, estabelece que a luz, para ir de um ponto a outro, segue o caminho que leva um tempo mínimo. Com isto, pode-se deduzir as leis de reflexão e refração da ótica geométrica.

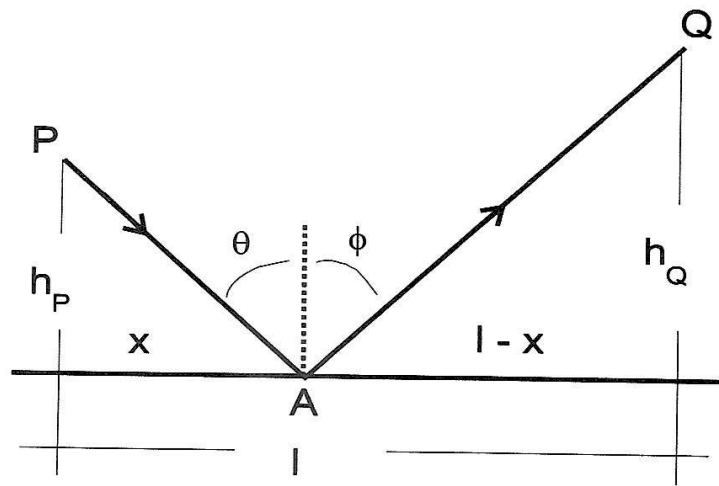


Figura IV.6: Exercício 13 – primeira parte

Sejam dois pontos P e Q como mostra a Figura IV.6. Um raio luminoso é emitido em P e deve atingir Q após uma reflexão no espelho. Mostre que o tempo será mínimo quando $\theta = \phi$ (ângulo de incidência igual ao ângulo de reflexão).

Considere, agora, que os pontos P e Q estejam em meios diferentes, como mostra a Figura IV.7, em que n_1 e n_2 são os índices de refração de cada meio. Mostre que neste caso o tempo será mínimo se $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$

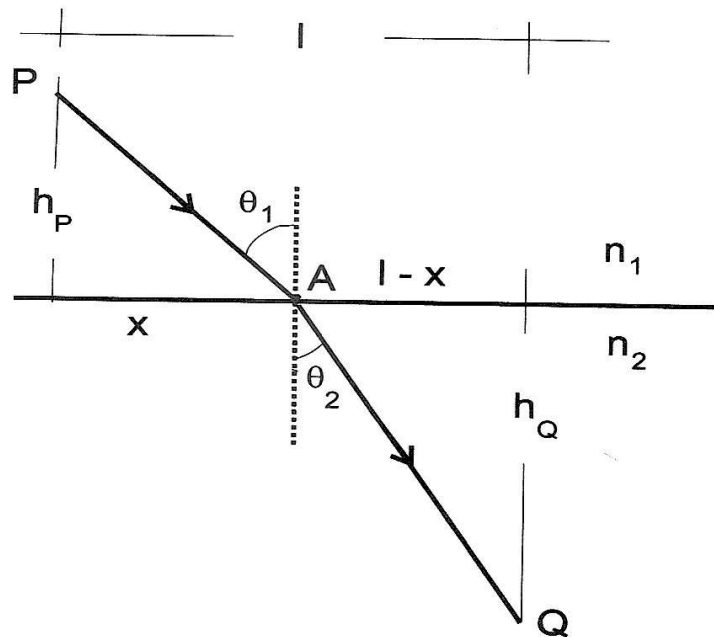


Figura IV.7: Exercício 13 – segunda parte

14*. Considere um lago na forma de um semi-círculo de 1 km de raio (veja Figura IV.8). Uma pessoa está inicialmente no ponto P . Ela deseja ir até o ponto Q . Primeiro ela nada em linha reta até o ponto R da margem curva e, depois, ela vai andando pela margem do lago até o ponto final. Sabendo-se que sua velocidade nadando é de 2 km/h e andando é de 4 km/h , calcule o tempo mínimo e máximo que ela pode levar para fazer a travessia.

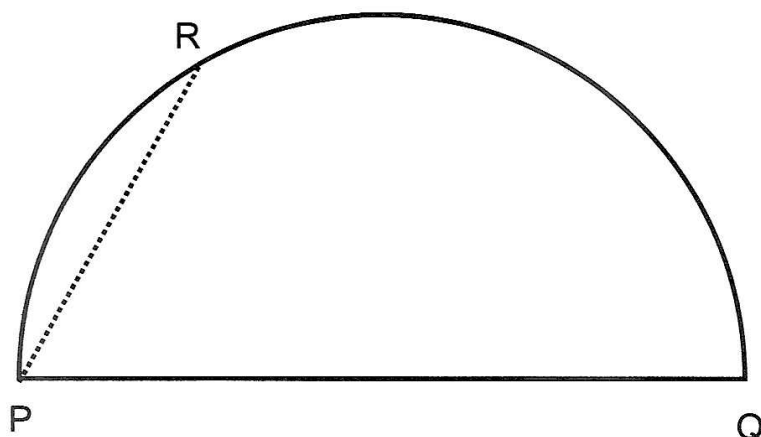


Figura IV.8: Exercício 14

15. Dois barcos A e B partem do instante $t = 0$ como mostra a Figura IV.9. Obter a distância de maior aproximação e o instante em que isto ocorre.

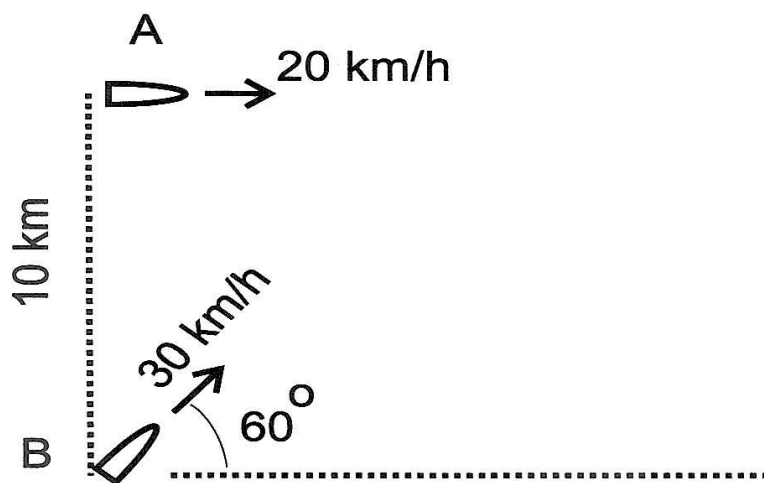


Figura IV.9: Exercício 15

16. Calcular a menor e a maior distância entre o ponto $P (3,5)$ e o círculo $x^2 + y^2 = 4$.

17. Obter a equação da reta tangente à curva

$$(x + y)^3 + (x - y)^3 = x^4 + y^4$$

que passa pelo ponto de coordenada $x = 1$ e $y > 0$.

18. Calcular a equação das retas que passam pelo ponto $(-1,2)$ e que são tangentes à curva $4xy = 1$ (hipérbole).

19. Seja o círculo $x^2 + y^2 = 1$. Obter as equações das retas tangentes passando pelo ponto $(2,0)$. Idem para o ponto $(2,2)$

20. O projeto de uma pista de atletismo medindo 600 m é mostrado na Figura IV.10, em que as extremidades são semicírculos de raio $b/2$. Deseja-se

que o retângulo central seja um campo de futebol com a maior área possível. Calcular as dimensões do campo.

21*. Qual a (menor) distância entre o ponto P de coordenadas $(1,1)$ e a reta $y = 2x + 3$?

22*. Considere um corpo de massa m sendo lançado da superfície da Terra com velocidade de módulo V , como mostra a Figura IV.11. Sabendo-se que a força de atração gravitacional, que atua sobre o corpo quando ele está numa distância r do centro da Terra, é dada por (módulo)

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

e está voltada para o centro da Terra (esta é a lei da gravitação de Newton), calcule o valor mínimo da velocidade inicial V para que o corpo consiga se libertar da atração gravitacional terrestre.

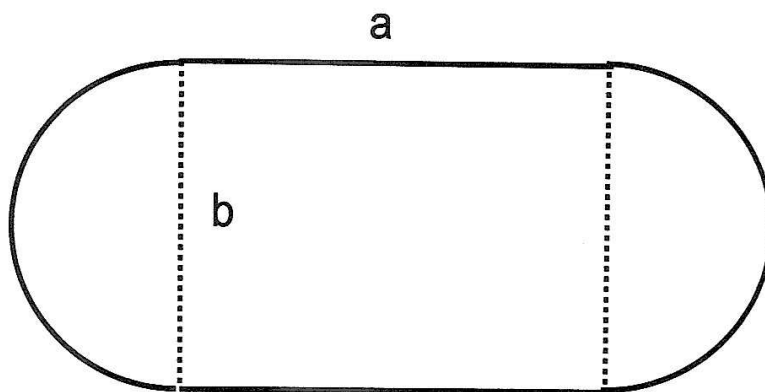


Figura IV.10: Exercício 20

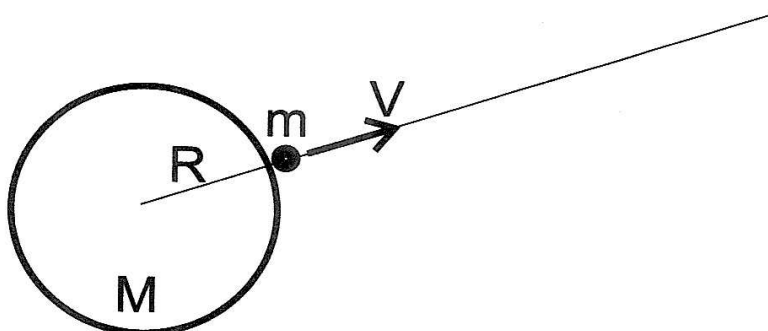


Figura IV.11: Exercício 22

23*. Calcular as dimensões do trapézio de área máxima inscrito num semicírculo de raio R .

24. Calcular as dimensões do triângulo isósceles de menor área circunscrito a um círculo de raio a .

25. Calcular as dimensões do cone de volume mínimo circunscrito a uma esfera de raio a .

Capítulo V

Integrais

1. Outra forma de olhar para uma relação diferencial de primeira ordem

Seja uma relação diferencial de primeira ordem, escrita como

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad (\text{V.1})$$

Ela está nos dizendo que a derivada de uma certa função $F(x)$, em relação a x , dá uma outra função $f(x)$. Na verdade, não há novidade alguma nisso. Já vimos várias e várias vezes que a derivada de uma função leva a outra função.

Vamos reescrever a relação acima de outra forma

$$dF(x) = f(x) dx \quad (\text{V.2})$$

Conforme já vimos, ao começar a estudar derivadas, podemos considerar $dF(x)$ como sendo a variação infinitesimal da função $F(x)$ entre x e $x + dx$, isto é,

$$dF(x) = F(x + dx) - F(x) \quad (\text{V.3})$$

Sendo dx uma quantidade infinitesimal relacionada ao limite $\Delta x \rightarrow 0$.

Por outro lado, tomando dois pontos quaisquer da variável x , digamos $x = a$ e $x = b$, temos que a variação $\Delta F(x)$ neste intervalo é

$$\Delta F(x) = F(b) - F(a) \quad (\text{V.4})$$

Observando (V.3) e (V.4), podemos interpretar ΔF como sendo a soma das quantidades infinitesimais dF , desde $x = a$ até $x = b$. Fazer esta soma é o que chamamos de **integrar**, palavra que significa *juntar*, *reunir* etc. Assim, quando dizemos que integramos $dF(x)$ desde $x = a$ até $x = b$, estamos também

dizendo que “juntamos” todos os pequenos pedaços infinitesimais $dF(x)$ para formar $\Delta F(x)$. Em Matemática, temos um símbolo especial para dizer isto,

$$\Delta F(x) = F(b) - F(a) = \int_a^b dF(x) \quad (\text{V.5})$$

que é o conhecido símbolo de integração.

O que foi dito acima é algo bem compreensível. Estamos simplesmente dizendo que ΔF é a soma das infinitas quantidades dF . Há vários exemplos em que podemos visualizar isto. A Figura V.1 mostra um caso no qual dF é um pedaço de uma certa linha. Somando todos os pedaços, desde $x = a$ até $x = b$, obteremos o comprimento da linha neste intervalo. Esta soma pode ser feita para qualquer outra quantidade, quer de natureza geométrica (como áreas, volumes etc.) ou não.

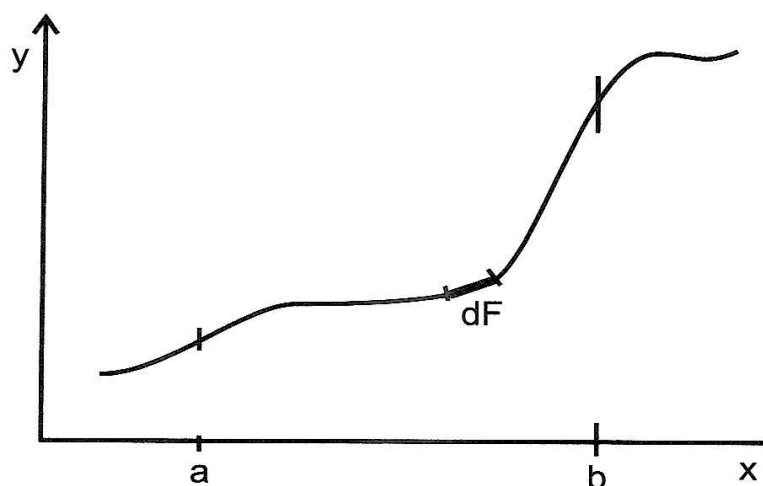


Figura V.1: Comprimento do trecho de uma linha

Agora vem o ponto importante. Vamos considerar esta soma de infinitas quantidades infinitesimais, mas olhando para o lado direito da relação (V.2). Como sabemos que o lado esquerdo leva à quantidade (V.5), temos, então,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (\text{V.6})$$

É importante ver, com clareza, o que a expressão acima está nos dizendo. Se você tem uma quantidade infinitesimal $f(x) dx$ (válida, portanto, no intervalo entre x e $x + dx$), podemos somar todas essas quantidades, num certo intervalo finito (no caso, de $x = a$ até $x = b$), apenas conhecendo a função cuja derivada dá $f(x)$.

Vamos tomar um exemplo simples. Suponhamos que uma carga elétrica esteja distribuída ao longo de uma haste de comprimento l , com uma densidade linear de cargas dada por

$$\lambda = k x^2 \quad (\text{V.7})$$

onde k é um parâmetro constante e x corresponde a pontos sobre a haste. Queremos saber a carga nela contida.

Pela definição de densidade linear de carga, $\lambda = \frac{dq}{dx}$, temos que a quantidade de carga dq entre x e $x + dx$ é dada por

$$dq = k x^2 dx \quad (\text{V.8})$$

Logo, pelo que vimos acima, a carga total da haste será a soma (integral) de todas essas quantidades infinitesimais desde $x = a$ até $x = b$.

$$\begin{aligned} Q &= \int_a^b k x^2 dx \\ &= \left. \frac{1}{3} k x^3 \right|_a^b \\ &= \frac{k}{3} (b^3 - a^3) \end{aligned} \quad (\text{V.9})$$

Na segunda linha, $kx^3/3$ é a função cuja derivada dá a função inicial kx^2 . A barra vertical colocada logo depois, contendo os extremos a e b , é uma notação indicando que o resultado da integração é desde $x = a$ até $x = b$.

Vamos concluir esta seção com algumas observações:

(i) Neste momento pode ser que você esteja questionando o porquê de não termos escrito acima a forma mais geral da função cuja derivada dá kx^2 , que seria $kx^3/3 + C$, com a presença da constante C .

Se você estava com essa dúvida, tem toda razão. A função que escrevemos em (V.9) é um caso particular. Entretanto, a constante aqui não desempenha nenhum papel relevante, pois, ao tomar os limites de integração ela desaparece. Para que não haja dúvidas quanto a isto, vamos repetir o desenvolvimento em (V.9) colocando a constante.

$$\begin{aligned} Q &= \int_a^b k x^2 dx \\ &= \left(\frac{1}{3} k x^3 + C \right) \Big|_a^b \\ &= \left(\frac{k}{3} b^3 + C \right) - \left(\frac{k}{3} a^3 + C \right) \\ &= \frac{k}{3} (b^3 - a^3) \end{aligned}$$

Como vemos, a constante C é cancelada entre os dois termos da penúltima passagem.

(ii) O símbolo de integração pode aparecer sem os limites. Neste caso, o significado de $\int \dots dx$ passa a ser simplesmente: O que derivando em relação a

x dá ...? Aqui sim, na resposta, devemos escrever a relação geral com a presença da constante (Como não estamos colocando os limites, não há justificativa para omiti-la). Se considerássemos isto para a função do exemplo acima, teríamos

$$\int k x^2 dx = \frac{1}{3} k x^3 + C \quad (\text{V.10})$$

(iii) Embora tenhamos feito o desenvolvimento para chegar à relação (V.6), partindo do fato que a soma dos diversos dF de $x = a$ até $x = b$ fornece a relação (V.5), isto é, que $\Delta F = F(b) - F(a) = \int_a^b dF$, podemos notar que este resultado é particularmente compatível com a interpretação dada para a própria relação (V.6). Olhando para a integral $\int_a^b dF$, podemos fazer a mesma pergunta do item anterior: O que derivado em relação a F dá 1? Obviamente, o resultado é F (não há necessidade da constante devido aos limites de integração) e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \int_a^b dF &= F \Big|_a^b \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned} \quad (\text{V.11})$$

(iv) No exemplo que discutimos no item 3 do capítulo anterior (um exemplo de Física Básica), vimos que a segunda lei de Newton levou-nos a duas equações, (IV.15) e (IV.16). Vou reescrevê-las abaixo.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= 0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -g \end{aligned}$$

Naquela oportunidade, dissemos que estávamos diante de duas equações diferenciais (as incógnitas apareciam dentro do símbolo de derivada) e que não era o caso de transformá-las em integrais. Agora, estamos vendo a razão disto. A integral é uma outra forma de olhar para uma equação diferencial de primeira ordem e as relações acima são equações diferenciais de segunda ordem. Caso optássemos em reescrevê-las usando a velocidade (e não a posição), teríamos

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= 0 \\ \frac{dv_y}{dt} &= -g \end{aligned}$$

Estas são equações de primeira ordem e, conseqüentemente, poderíamos usar integrais para obter v_x e v_y (depois, ao se conhecer as expressões da velocidade, procedemos da mesma maneira para obter a posição). Faça isto como um exercício.

O que vimos acima pode estar permitindo a (falsa) indução de que uma equação diferencial de qualquer ordem pode ser tratada sucessivamente como equações diferenciais de primeira ordem. Seria uma simplificação muito grande se isto fosse verdade, mas não é. As equações do nosso exemplo são casos muito particulares de equações diferenciais lineares, cuja forma geral é

$$\frac{dx^n}{dt^n} + \alpha_{n-1}(t)\frac{dx^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + \alpha_1(t)\frac{dx}{dt} + \alpha_0(t) = f(x) \quad (\text{V.12})$$

que, portanto, tem de ser olhada como uma equação diferencial mesmo. No Apêndice C, mostraremos um exemplo em que uma equação diferencial de segunda ordem é resolvida.

(v) Pode ser que você já tenha ouvido falar em integrais duplas, triplas etc. e se não seriam essas integrais que estariam relacionadas às equações diferenciais de segunda ordem, terceira ordem etc. A resposta é não. Vimos que uma equação diferencial de primeira ordem está relacionada à uma integral, que chamamos também de integral simples. As integrais duplas, triplas etc. são generalizações diretas das integrais simples. Vimos também que estas são somas de quantidades infinitesimais $f(x)dx$. Uma integral dupla seria uma soma de quantidades infinitesimais dadas por $f(x, y) dxdy$ (em que a quantidade infinitesimal $dxdy$ é uma pequena área de lados dx e dy). A soma, neste caso, tem de ser feita nas duas direções x e y . O mesmo ocorre para integrais triplas etc. No final deste capítulo estudaremos um pouco essas extensões da integral.

2. Um exemplo de geometria

Dentre os vários exemplos que poderíamos apresentar, vamos escolher um e deixar os outros para serem feitos como exercícios. Usaremos aqui o conceito de integral para calcular o volume de uma esfera de raio R , levando à conhecida relação $\frac{4}{3}\pi R^3$.

O que temos de fazer, inicialmente, é identificar a quantidade infinitesimal de volume a ser integrada. Às vezes, há mais de uma possibilidade para escrevê-la. No presente exemplo, faremos isto de três maneiras diferentes.

Primeiro, consideremos a esfera como sendo formada por infinitos cilindros de altura dy e raio x como mostra a Figura V.2. O elemento de volume infinitesimal dV é dado por

$$dV = \pi x^2 dy \quad (\text{V.13})$$

Para fazer a integração, temos de escrever o lado direito desta quantidade em termos de uma só variável. Do jeito que está, fica sem sentido perguntar o que derivando em relação a y dá πx^2 ? No presente exemplo, este problema é facilmente contornado. Na vista lateral da esfera que foi apresentada na Figura V.2, temos $x^2 + y^2 = R^2$. Assim, substituindo x^2 por $R^2 - y^2$ em (V.13), vem

$$dV = \pi (R^2 - y^2) dy \quad (\text{V.14})$$

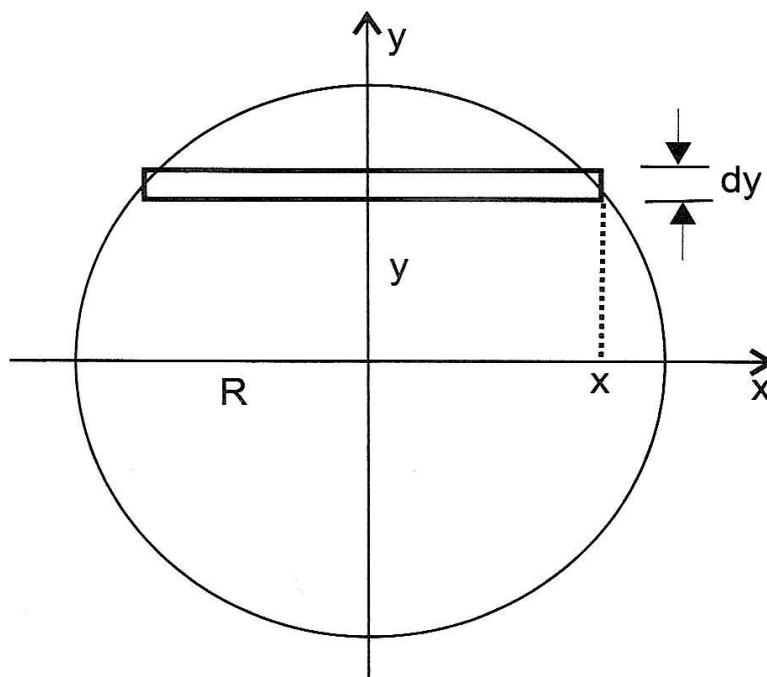


Figura V.2: Vista lateral de uma esfera de raio R

Agora está tudo pronto para fazer a integração. Podemos ir de $y = -R$ até $y = R$ ou, considerando a simetria do problema, ir de $y = 0$ até $y = R$ e multiplicar o resultado por 2. Vamos considerar este segundo caso.

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \int_0^R \pi(R^2 - y^2) dy \\
 &= 2\pi \left(R^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^R \\
 &= 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) \\
 &= \frac{4}{3} \pi R^3
 \end{aligned}$$

Como segunda maneira de tomar o elemento de volume inicial para ser integrado, consideramos a esfera sendo formada por infinitas cascas de raio r e espessura dr , como mostra a Figura V.3. O volume da casca é

$$dV = 4\pi r^2 dr \quad (\text{V.15})$$

em que $4\pi r^2$ é a área da superfície esférica de raio r . Se você não lembrava disso, poderia também usar integrais para obter esta relação (isto será feito como exercício). Aqui não há dificuldade alguma com respeito às variáveis (já está tudo em termos de r). Fazendo a integração desde $r = 0$ até $r = R$, teremos o volume da esfera

$$V = \int_0^R 4\pi r^2 dr$$

$$\begin{aligned}
&= \left. \frac{4}{3} \pi r^3 \right|_0^R \\
&= \frac{4}{3} \pi R^3
\end{aligned}$$

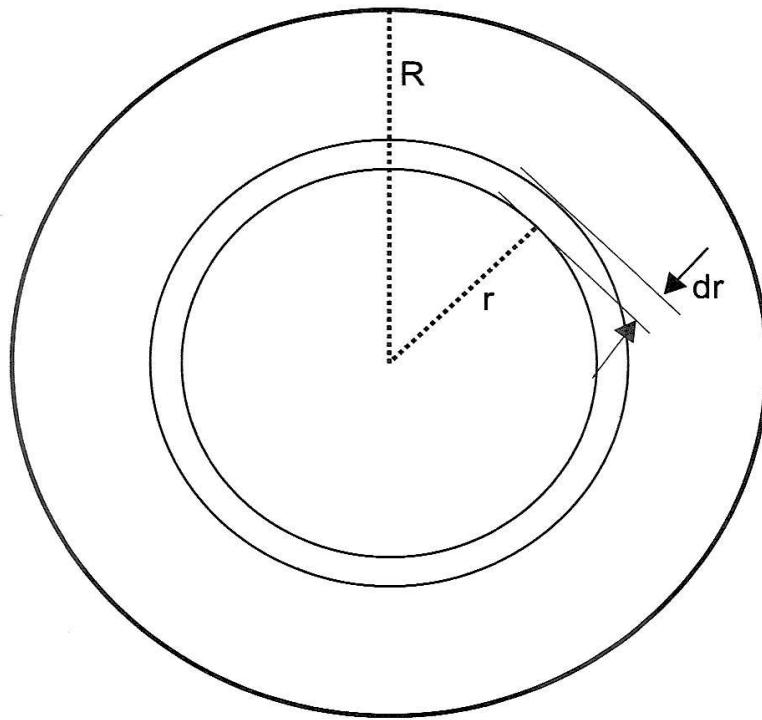


Figura V.3: Esfera sendo formada por cascas esféricas.

Na terceira alternativa, consideraremos o elemento de volume infinitesimal como sendo um cone de altura R e base (infinitesimal) dS sobre a superfície esférica (veja Figura V.4). O volume deste cone é

$$dV = \frac{1}{3} R dS \quad (\text{V.16})$$

Também podemos mostrar que o volume do cone é um terço da área da base vezes a altura usando integrais (também está nos exercícios). Integrando os volumes dados por (V.16), temos

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{4\pi R^2} \frac{1}{3} R dS \\
&= \left. \frac{1}{3} R S \right|_0^{4\pi R^2} \\
&= \frac{4}{3} \pi R^3
\end{aligned}$$

Comparando todos os processos, notamos que o trabalho algébrico em alguns foi bem menor. Isto às vezes acontece. Devemos estar atentos porque o uso de certas variáveis pode levar a simplificações significativas. No primeiro caso,

usamos coordenadas cartesianas retangulares. Embora o trabalho algébrico não tenha sido tão grande, essas coordenadas podem não ser adequadas a problemas de simetria esférica ou circular. Para citar um argumento em favor do que estou dizendo, temos a equação do círculo. No caso de coordenadas cartesianas retangulares, a equação de um círculo de raio R com centro na origem é dada por $x^2 + y^2 = R^2$. Usando coordenadas polares (falaremos mais sobre elas daqui a pouco), a equação do mesmo círculo é simplesmente $r = R$.

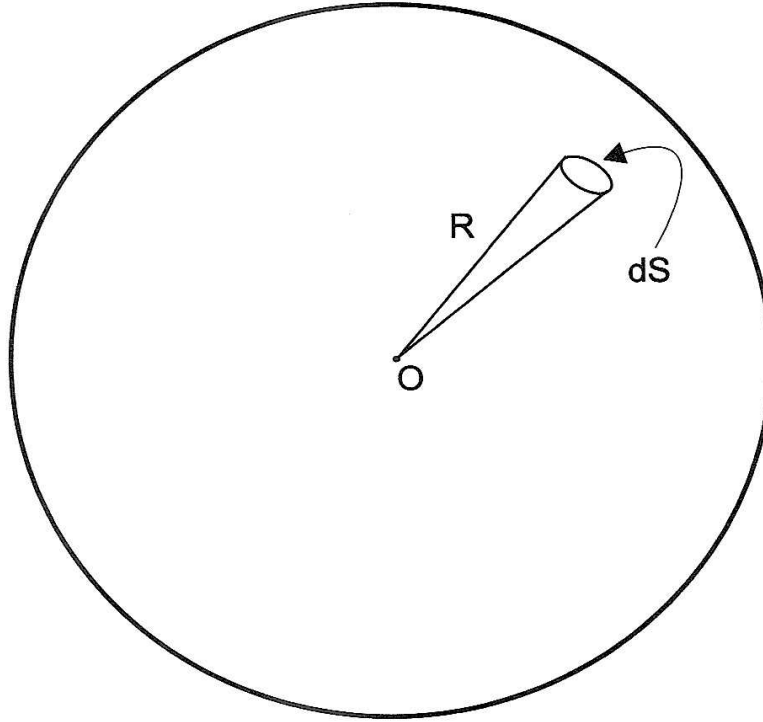


Figura V.4: Esfera sendo formada por cones de altura R .

3. Um exemplo de Física Básica

Vamos tomar como exemplo o exercício 22 do capítulo anterior, de um corpo de massa m sendo lançado verticalmente da superfície da Terra com velocidade V , em que foi solicitado para você resolver usando derivadas (cálculo de V para que ele se liberte da atração gravitacional da Terra). Veja a Figura V.5, na qual estão todas as quantidades relevantes. $\vec{v}$ é a velocidade do corpo num ponto r da trajetória (retilínea)

Pela segunda lei de Newton e pela lei da gravitação (também devida a Newton), temos

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \quad (\text{V.17})$$

Como o problema é numa dimensão, não há necessidade do uso da notação vetorial. Fazendo a simplificação de m (o problema não depende da massa do corpo), obtemos a relação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dv}{dt} = -G \frac{M}{r^2} \quad (\text{V.18})$$

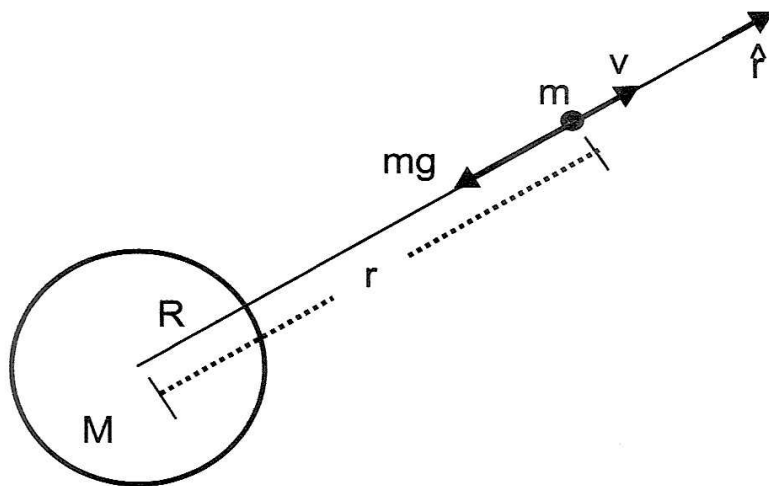


Figura V.5: Corpo lançado verticalmente da superfície da Terra

Temos aqui um problema que você deve ter se deparado ao resolver o exercício 22 do capítulo anterior. Do jeito que a relação acima está sendo apresentada, não dá para tentar resolver a equação diferencial nem para transformá-la numa integral. Deveríamos ter apenas duas variáveis, mas há três (r , v e t). No caso, a passagem de três para duas variáveis pode ser feita com o uso da regra da cadeia e da definição de velocidade, pois

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} \\ &= \frac{dv}{dr} v\end{aligned}\tag{V.19}$$

Substituindo este resultado em (V.18), obtemos a seguinte relação infinitesimal

$$v dv = - \frac{GM}{r^2} dr\tag{V.20}$$

Agora está tudo preparado para fazer a integração. Pelos dados do problema, a do lado direito será feita desde $r = R$ até $r = \infty$. No lado esquerdo, os limites correspondentes para v são V e 0. Assim,

$$\begin{aligned}\int_V^0 v dv &= \int_R^\infty \left(- \frac{GM}{r^2} dr \right) \\ \Rightarrow \frac{v^2}{2} \Big|_V^0 &= \frac{GM}{r} \Big|_R^\infty \\ \Rightarrow V &= \sqrt{\frac{2GM}{R}}\end{aligned}\tag{V.21}$$

Esta é a expressão da chamada velocidade de escape. Substituindo os valores numéricos ($G = 6,67 \times 10^{-11} m^3 s^{-2} kg^{-1}$, $M = 5,98 \times 10^{24} kg$ e $R = 6,37 \times 10^6 m$), encontramos

$$V = 1,1 \times 10^4 m/s \simeq 40\,000 km/h$$

que é realmente a velocidade aproximada que uma nave espacial deve ter para se libertar do campo gravitacional terrestre.

No caso da Lua, onde $M_L = 7,35 \times 10^{22} \text{ kg}$ e $R_L = 1,74 \times 10^6 \text{ m}$, esta velocidade seria bem menor.

$$V = 2,4 \times 10^3 \text{ m/s} \simeq 8\,500 \text{ km/h}$$

Você já viu algum filme sobre as viagens do *Projeto Apolo*? Você reparou na facilidade com que os astronautas saíram da Lua comparativamente com a Terra? Os resultados acima explicam isto. Eles explicam também porque a Terra consegue manter uma atmosfera e a Lua não. No caso da Terra, a velocidade (térmica) das moléculas de ar é menor do que $40\,000 \text{ km/h}$ e no caso da Lua seria maior que $8\,500 \text{ km/h}$.

4. Propriedades e regras de integração

4a. A integração é uma operação linear

De acordo com as propriedades da derivação (e observando os exemplos de integrais que fizemos até agora), facilmente concluímos que a integração satisfaz à propriedade

$$\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] dx = c_1 \int f_1(x) dx + c_2 \int f_2(x) dx \quad (\text{V.22})$$

em que c_1 e c_2 são duas constantes. Esta é a relação característica de um operador linear. Observe que a usamos, indiretamente, em todas as integrações que já fizemos.

4b. Integrais de funções simétricas e antissimétricas

Uma outra propriedade de grande utilidade concerne à integração de funções simétricas e antissimétricas. Na Figura V.6 mostramos um exemplo de função simétrica. Vemos que estas funções caracterizam-se por

$$f(x) = f(-x) \quad (\text{V.23})$$

No caso de integrações deste tipo de função, num intervalo de $x = -a$ até $x = a$, temos

$$\int_{-a}^{+a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad (\text{V.24})$$

Aliás, já usamos esta propriedade no exemplo da Seção 2, na integração de (V.14).

Consequentemente temos que a integração de uma função antissimétrica,

$$f(x) = -f(-x) \quad (\text{V.25})$$

para o mesmo intervalo é zero.

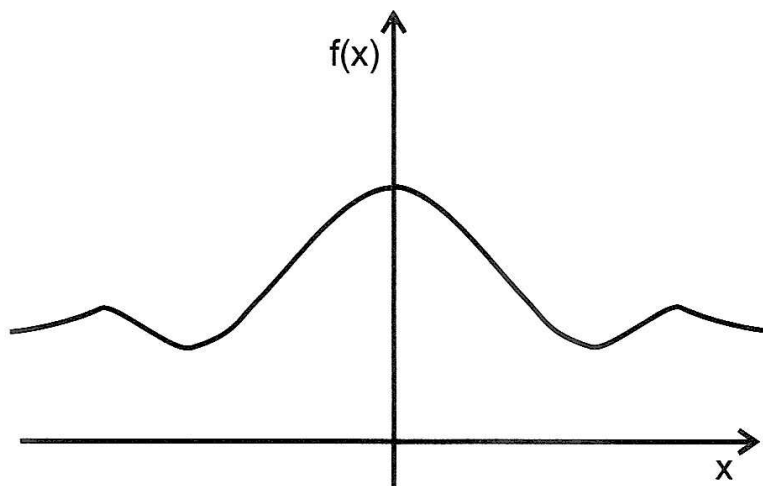


Figura V.6: Exemplo se função simétrica

4c. Regras de integração

Estas são fórmulas prontas que permitem responder diretamente a pergunta básica da integração (Qual a função cuja derivada dá ...?). Existem longos formulários a respeito (até mesmo livros inteiros apenas sobre tabelas de integrais). Não vamos complicar este ponto nem ocupar nossas mentes decorando fórmulas. Consideraremos, por enquanto, apenas uma (que já foi usada em todos os exemplos discutidos até então), que é a integração de uma função de potência. Tendo em vista a experiência que temos sobre derivadas de funções de potência, não há dificuldade alguma em ver que a relação

$$\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C \quad (\text{V.26})$$

é realmente verdadeira, pois a derivada de $\frac{u^{m+1}}{m+1}$ com respeito a u dá u^m . Em que m é um número racional qualquer e u é uma variável genérica qualquer.

Vemos que a relação (V.26) não é definida para $m = -1$, isto é, a função cuja derivada dá $1/u$ não pode ser obtida pela relação acima. Neste caso, temos um outro tipo de função cuja derivada dá $1/u$ (é a função logaritmo que estudaremos no Capítulo VII).

5. Uma visão geral sobre o processo de integração

Em resumo, podemos dizer que o uso do processo de integração num determinado problema consiste de três etapas

- Identificar o elemento infinitesimal a ser integrado.
- Preparar este elemento de forma que a integração possa ser feita. Isto é, ele deve ser do tipo $f(u) du$, em que u , como dissemos, é uma variável genérica qualquer.
- Por fim, após ter preparado o elemento diferencial para ter a forma $f(u) du$ você tem de saber qual função cuja derivada em relação a u dá $f(u)$.

Observe que foram estas as etapas dos exemplos discutidos até então e, o que é importante dizer, **é isto que faremos sempre**. Apenas para ficar bem claro (e para clarear o que pretendo ainda dizer), deixe-me fazer uma breve análise desses exemplos à luz do que foi dito acima.

No primeiro exemplo, do cálculo da quantidade de carga contida numa linha desde $x = a$ até $x = b$, identificamos o elemento de carga como sendo $dq = kx^2 dx$. Aqui não foi necessário fazer nenhuma modificação no elemento diferencial, pois ambos os lados da relação já estavam preparados para o processo de integração (que foi realmente feito sem maiores dificuldades).

No segundo caso, vimos que o primeiro elemento diferencial que usamos estava inicialmente na forma $dV = \pi x^2 dy$ [veja expressão (V.13)]. Tivemos, então, de prepará-lo para que o lado direito pudesse ser integrado. Fizemos isto na expressão seguinte, (V.14), na qual obtivemos $dV = \pi (R^2 - y^2) dy$ que pôde, então, ser integrado sem problemas. Para os dois outros elementos diferenciais que usamos, não houve necessidade de nenhuma preparação.

No último caso, do corpo lançado a partir da superfície da Terra, vimos que usando a segunda lei de Newton e a lei da gravitação (também devida a Newton), fomos levados à relação (V.18), envolvendo as seguintes quantidades diferenciais

$$\frac{dv}{dt} = -G \frac{M}{r^2}$$

Vemos aqui, devido ao fato de termos três variáveis, que não há jeito de se ter em cada lado uma expressão do tipo $f(u) du$. Ela precisou, então, ser preparada. O resultado foi a expressão (V.20)

$$v dv = - \frac{GM}{r^2} dr$$

No qual ambos os lados são do tipo $f(u) du$ e puderam ser integrados sem problemas também.

Mais uma vez, digo a vocês que integrar é só isto. É a aplicação dessas três etapas. As dificuldades que podem existir (muitas vezes existem mesmo) estão na parte técnica relacionada a cada uma das etapas. Primeiro, dada a natureza do problema, nem sempre é possível identificar o elemento diferencial. Segundo, mesmo após a sua identificação e a sua preparação para se ter a forma $f(u) du$, pode não ser simples responder a última pergunta [o que derivamos em relação a u que dá $f(u)$]. Às vezes, nem é questão de ser difícil responder, pode ser que a resposta não exista mesmo.

Vamos concluir esta seção falando um pouco mais sobre a resposta à pergunta acima. Quando ela não existe (ou não sabemos respondê-la), o processo de integração não está perdido. Podemos obter informações sobre o problema fazendo a integração por métodos numéricos (depois do advento dos computadores estes métodos ficaram bastante aperfeiçoados). Não é nosso objetivo desenvolver tais métodos aqui. O que vamos fazer agora é se concentrar um pouco mais na resposta à pergunta embutida na integração de $f(u) du$, isto é, o

que derivamos em relação a u que dá $f(u)$. O ponto que estou querendo destacar é que muitas vezes esta resposta existe, mas a forma como $f(u) du$ pode estar escrita não permite que a vejamos. Sejam alguns exemplos.

(i) Vamos supor que num determinado problema você tenha identificado o elemento diferencial

$$x \sqrt{1+x^2} dx \quad (\text{V.27})$$

Não há dúvidas de que ele é do tipo $f(x) dx$, em que $f(x) = x \sqrt{1+x^2}$. Entretanto, a resposta à pergunta, o que derivamos em relação a x que dá $x \sqrt{1+x^2}$ pode não ser tão direta. Neste caso, para vê-la, basta modificar um pouco a forma do elemento diferencial. De fato, fazendo

$$1+x^2 = u \quad (\text{V.28})$$

temos

$$\sqrt{1+x^2} = u^{\frac{1}{2}} \quad (\text{V.29})$$

$$\text{e} \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad du = 2x dx \quad (\text{V.30})$$

Substituindo (V.29) e (V.30) em (V.27), o nosso elemento diferencial toma outra aparência

$$\begin{aligned} x \sqrt{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \sqrt{1+x^2} (2x dx) \\ &= \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} du \end{aligned} \quad (\text{V.31})$$

Agora, ele possui a forma dada na expressão (V.26) e não é difícil obter a resposta para a pergunta, o que derivamos em relação a u que dá $\frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C &= \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned} \quad (\text{V.32})$$

Portanto, podemos escrever o resultado da integração

$$\int x \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C \quad (\text{V.33})$$

Confirme, mais uma vez (caso você ainda tenha dúvidas) que isto é realmente verdade, ou seja, que derivando $\frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}}$ com respeito a x obtém-se $x \sqrt{1+x^2}$.

(ii) Vamos apresentar uma outra maneira que pode tornar possível o cálculo de algumas integrais. Considere que você não esteja conseguindo ver num certo elemento diferencial $f(x) dx$ o que foi derivado em relação a x que deu $f(x)$. Entretanto, suponha que o elemento $f(x) dx$ possa ser reescrito da forma $u(x) g(x) dx$ e que você saiba uma parte da resposta, por exemplo, a função que derivada em relação a x dá $g(x)$. Se isto acontecer, há uma possibilidade de o problema ser resolvido. Vejamos como.

Considere, então, que $v(x)$ seja a função cuja derivada dá $g(x)$, isto é,

$$\frac{dv}{dx} = g \quad \Rightarrow \quad dv = g dx$$

Assim, você pode escrever o elemento diferencial $u(x) g(x) dx$ como $u(x) dv(x)$. Considerando a regra da derivação de um produto de funções, a quantidade udv pode ser reescrita convenientemente como

$$udv = d(uv) - vdu \quad (\text{V.34})$$

Como vemos, a expressão inicial, que era $f(x) dx$ e que, depois, passou a $u(x) dv(x)$, agora aparece como a soma de dois termos dados por (V.34). O primeiro deles já está na forma simples de uma diferencial, significando que sua integração é diretamente dada por $u(x)v(x)$ (mais uma constante). O segundo termo é uma outra expressão diferencial. Se for possível integrá-la, o problema inicial estará resolvido! Este procedimento é conhecido como **integração por partes**.

Vamos apresentar um exemplo. Seja o seguinte elemento diferencial

$$x^3 \sqrt{1+x^2} dx \quad (\text{V.35})$$

Eu escolhi este exemplo porque, de acordo com o que fizemos no item anterior, sabemos integrar parte dele, isto é, sabemos integrar $x \sqrt{1+x^2} dx$ [veja expressão (V.33)]. Assim, seguindo a ideia acima, escrevemos

$$\begin{aligned} x^3 \sqrt{1+x^2} dx &= \frac{1}{3} x^2 d(1+x^2)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{3} d \left[x^2 (1+x^2)^{\frac{3}{2}} \right] - \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} dx^2 \end{aligned} \quad (\text{V.36})$$

Apenas por conveniência, deixei o segundo termo acima com dx^2 (é claro que poderia ter escrito, equivalentemente, $2x dx$)

Como vimos, a integral para o primeiro termo do lado direito de (V.36) é trivial. A do segundo, também, não apresenta nenhuma dificuldade e o resultado é $-\frac{2}{15}(1+x^2)^{\frac{5}{2}}$ (mais uma constante). A integral foi resolvida! Formalmente, podemos escrever então

$$\int x^3 \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{3} x^2 (1+x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15} (1+x^2)^{\frac{5}{2}} + C \quad (\text{V.37})$$

Deixaremos vários outros exemplos para serem feitos como exercícios.

6. Integrais duplas, triplas etc.

Geralmente, este assunto não é tratado no primeiro volume dos livros de Cálculo e, quando o é, deixa-se bem para o final. Entretanto, mesmo não sendo nosso objetivo estudar integrais múltiplas com detalhes, acho bem ilustrativo falar sobre elas aqui, visto serem uma simples generalização do que estamos estudando.

Todas as integrais de que tratamos até então partiam de um elemento diferencial como $f(x) dx$ (dentro do contexto das integrais múltiplas, elas são chamadas de integrais simples). As integrais duplas, triplas etc. nada mais são que integrais sobre elementos diferenciais do tipo $f(x, y) dx dy$, $f(x, y, z) dx dy dz$ etc., respectivamente. No caso da integral simples, com o elemento diferencial $f(x) dx$, a integração é feita sobre pontos da linha x . Para as integrais duplas de $f(x, y) dx dy$, os pontos a serem considerados estão sobre o plano xy , e assim por diante. A Figura V.7 mostra, comparativamente, o funcionamento das integrais simples e duplas (as demais seriam generalizações imediatas destas)

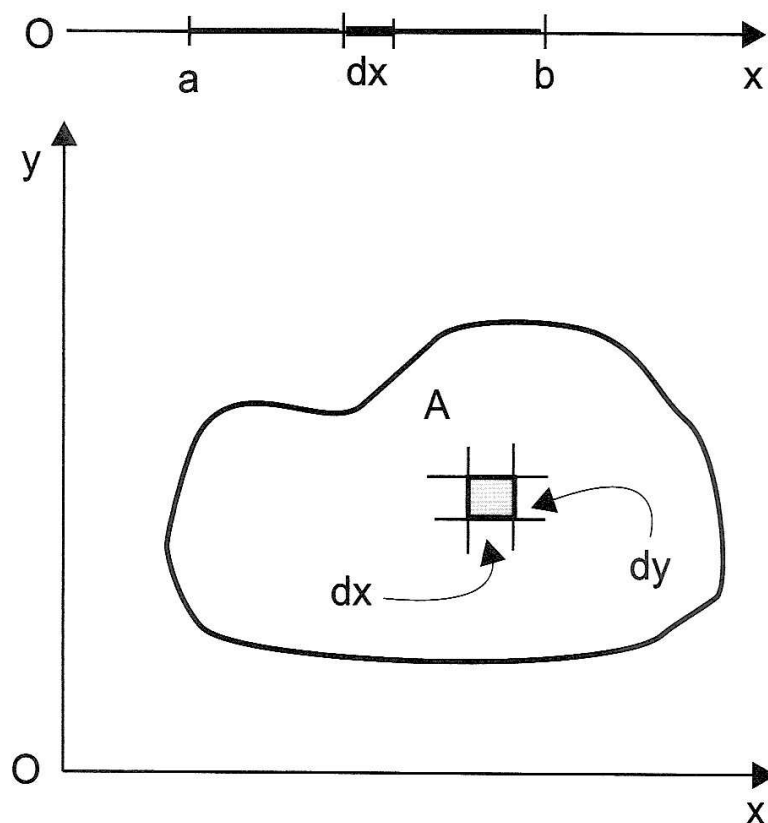


Figura V.7: Comparação entre integrais simples e duplas

Para as integrais simples, a soma das quantidades infinitesimais $f(x) dx$ vai de $x = a$ até $x = b$ (isto é, ela está apoiada sobre o eixo x , desde $x = a$ até $x = b$). Para as integrais duplas, a soma das quantidades $f(x, y) dx dy$ é feita sobre pontos de uma certa área (veja Figura V.8). Quando fazemos a soma sobre x , por exemplo, observe que a quantidade y permanece constante (e vice-versa).

Vamos ver num exemplo como isto funciona. Seja o caso da integral dupla sobre o seguinte elemento diferencial

$$dI = 3x^2y dx dy \quad (\text{V.38})$$

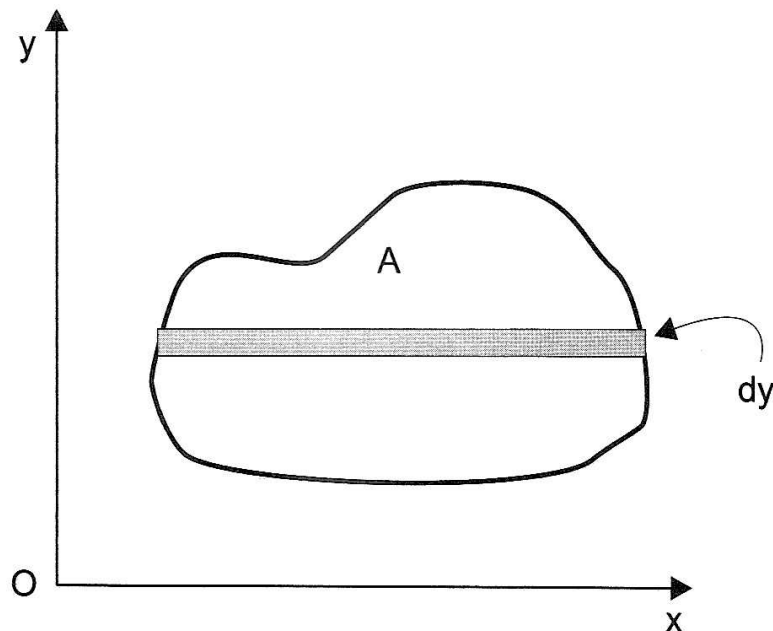


Figura V.8: Integração na coordenada x

Consideremos que ela seja feita sobre pontos de um retângulo limitado por $x = 0$, $x = 2$, $y = 1$ e $y = 2$. É indiferente a ordem das integrações. Vamos começar integrando sobre x . Formalmente, teríamos

$$I = 3 \int_1^2 \int_0^2 x^2 y \, dx \, dy \quad (\text{V.39})$$

A convenção é de que a primeira integral a ser feita, no caso em x , fique na parte mais interna e, assim, sucessivamente, até a última. Para a ordem estabelecida na expressão (V.39), temos

$$\begin{aligned} I &= 3 \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} y \Big|_0^2 \right) dy \\ &= 8 \int_1^2 y \, dy \\ &= 4y^2 \Big|_1^2 \\ &= 12 \end{aligned} \quad (\text{V.40})$$

Para que algumas das particularidades das integrais múltiplas fiquem bem claras, sejam as observações:

(i) É fácil ver que poderíamos ter feito primeiro a integração em y . Mais do que isto, no presente exemplo nada impediria que as duas fossem feitas simultaneamente pois os limites de uma não interferem com os da outra. De fato

$$I = 3 \int_0^2 x^2 \, dx \int_1^2 y \, dy$$

$$\begin{aligned}
&= 3 \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 \frac{y^2}{2} \Big|_1^2 \\
&= 12
\end{aligned}$$

(ii) Tomemos, agora, a integração sobre o mesmo elemento diferencial, mas considerando uma outra região de integração, um semicírculo de raio 1 e centrado na origem, como mostra a Figura V.9. Aqui, as duas integrações não podem ser feitas simultaneamente. Fazamos primeiro a integração em y

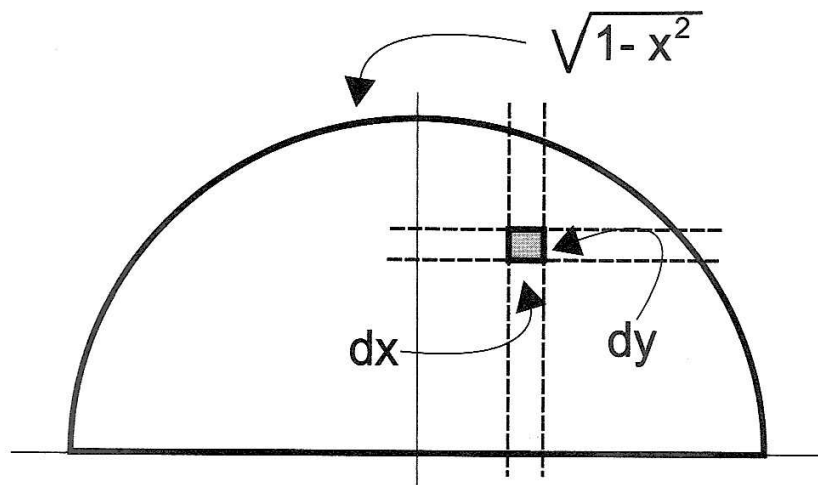


Figura V.9: Um outra região de integração

$$\begin{aligned}
I &= 3 \int_{-1}^{+1} x^2 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy \, dx \\
&= 3 \int_{-1}^{+1} x^2 \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\
&= 3 \int_0^1 x^2 (1 - x^2) \, dx \\
&= \frac{2}{5}
\end{aligned} \tag{V.41}$$

(iii) O resultado de uma integração não depende da ordem em que são feitas mas, em alguns casos, o trabalho algébrico pode depender da ordem considerada. Isto acontece para o exemplo acima, na integração sobre a região da Figura V.9. Caso tivéssemos optado em integrar primeiro sobre x , o trabalho algébrico seria um pouco maior.

$$\begin{aligned}
I &= 3 \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} x^2 \, dx \, dy \\
&= 6 \int_0^1 y \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{1-y^2}} dy \\
&= 2 \int_0^1 y (1 - y^2)^{3/2} dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2}{5}(1-y^2)^{5/2}\Big|_0^1 \\
&= \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Exercícios

1. Calcule as integrais abaixo (use o processo que julgar mais conveniente)

$$(a) \quad \int (3x^2 + 5x) dx$$

$$(b) \quad \int (2x + 4)^2 dx$$

$$(c) \quad \int (2x + 4)^{10} dx$$

$$(d) \quad \int \sqrt{a^2 + b^2 x^2} x dx$$

$$(e) \quad \int \frac{4x^2 - 3\sqrt{x}}{x} dx$$

$$(f) \quad \int \frac{dy}{\sqrt{a - by}}$$

$$(g) \quad \int t\sqrt{2t^2 + 3} dt$$

$$(h) \quad \int \frac{4x^2 dx}{\sqrt{x^3 + 8}}$$

$$(i) \quad \int \frac{2x - 1}{\sqrt{2 + x - x^2}} dx$$

$$(j) \quad \int \frac{x^3 + 1}{x^2} dx$$

$$(k) \quad \int t^{1/3} (1 + t^{4/3})^{-7} dt$$

$$(l) \quad \int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{u}}}{\sqrt{u}} du$$

$$(m) \quad \int \frac{dr}{\sqrt[3]{(7 - 5r)^2}}$$

$$(n) \quad \int \frac{y dy}{\sqrt{25 - 4y^2}}$$

$$(o) \quad \int \frac{dt}{t\sqrt{2t}}$$

$$(p) \quad \int (x^2 - \sqrt{x}) dx$$

$$(q^*) \quad \int x^3 \sqrt{1 + x^2} dx$$

- (r) $\int x \sqrt{1+x} dx$
- (s) $\int x \sqrt[3]{1+x} dx$
- (t) $\int x^2 \sqrt{1+x} dx$
- (u) $\int x^3 \sqrt{1+x} dx$
- (v) $\int x^2 (1+x^3)^9 dx$
- (w) $\int x (x+5)^{10} dx$
- (x) $\int x^2 (x+5)^{10} dx$
- (y) $\int x (x^2+5)^{10} dx$
- (z) $\int x^3 (x^2+5)^{10} dx$

2. Idem para as integrais abaixo

- (a) $\int_0^2 (a^2 x - x^3) dx$
- (b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$
- (c) $\int_0^a (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 dx$
- (d) $\int_0^3 \frac{t dt}{\sqrt{t^2+16}}$
- (e) $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$
- (f) $\int_1^5 \frac{x dx}{\sqrt{2x-1}}$
- (g) $\int_1^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x-1}}$

3*. A esta altura, você não deve ter tem dificuldade alguma para resolver a integral $\int x^2 dx$. Faça-a, agora, por partes, considerando que $x^2 dx = x dx x =$ etc.

4. Calcular o volume de um cone de raio R e altura h .

5. A equação de uma parábola é dada por

$$y = 4 - x^2$$

- (a) Para melhor visualizar o problema, faça o gráfico da parábola.
- (b) Calcule a área da região entre o eixo x e a parte positiva do eixo y .
- (c) Considere o sólido obtido pela revolução da curva acima em torno do eixo y . Calcule o volume deste sólido. Calcule também o volume do sólido obtido pela revolução em torno do eixo x .

6*. Um lago de profundidade de 2 m possui uma base dada pela Figura V.10. Em que a curva 1 possui equação $y = x^2$ e a curva 2, $y = 4/(x+1)^2$. Obtenha o volume do lago.

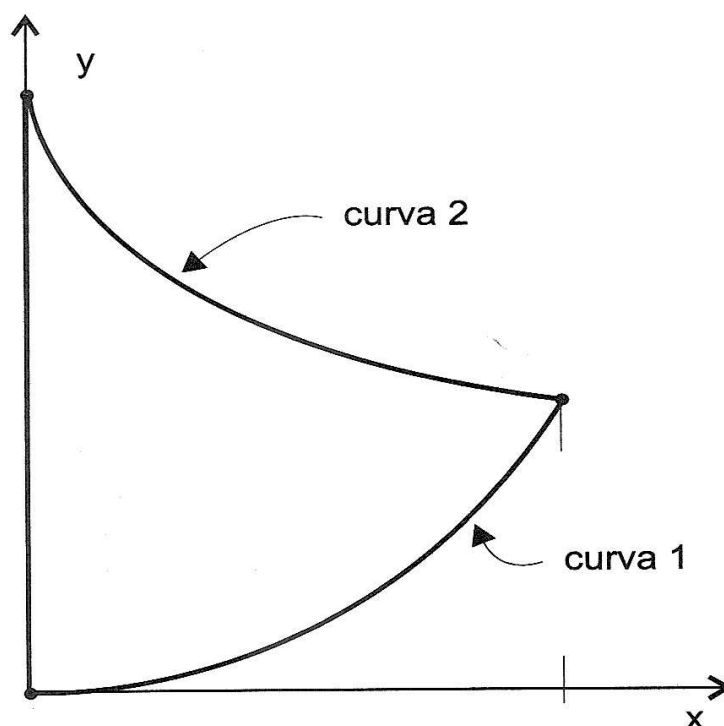


Figura V.10: Exercício 6

- 7*. Calcule o comprimento da curva $y = x^{3/2}$ entre $x = 0$ e $x = 4$
8. Calcule a área limitada pelas curvas mostradas na Figura V.11.
9. Estude o exemplo discutido na seção 3 do capítulo anterior usando integrais. Faça isto partindo das equações

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= 0 \\ \frac{dv_y}{dt} &= -g\end{aligned}$$

em lugar das relações (IV.15) e (IV.16)

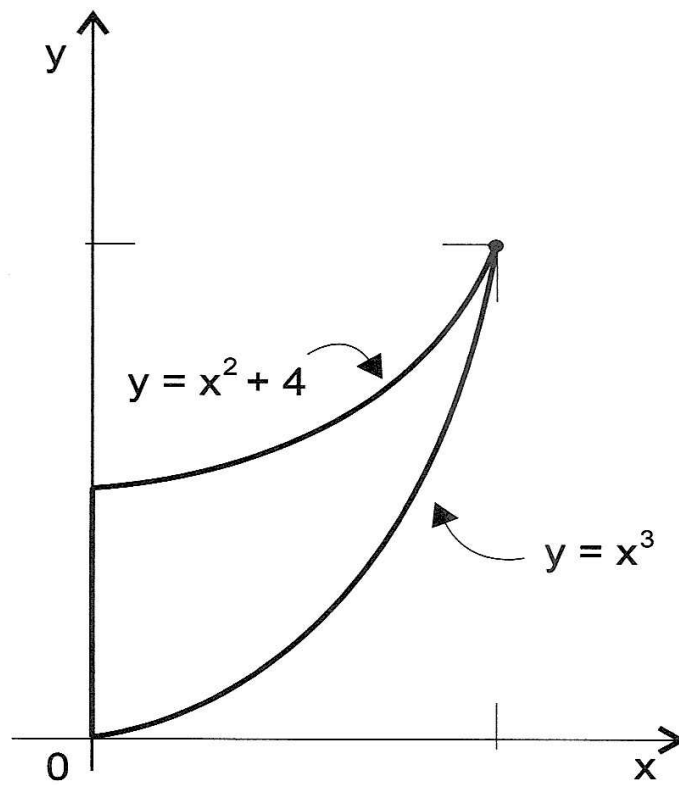


Figura V.11: Exercício 8

10. Considere uma massa M distribuída uniformemente ao longo de uma anel de raio R . Calcule a força gravitacional sobre uma massa pontual m localizada a uma altura h do eixo do anel, como mostra a Figura V.12. Faça, depois, $h \gg R$ no resultado que você encontrou. Isto leva você a alguma relação conhecida?

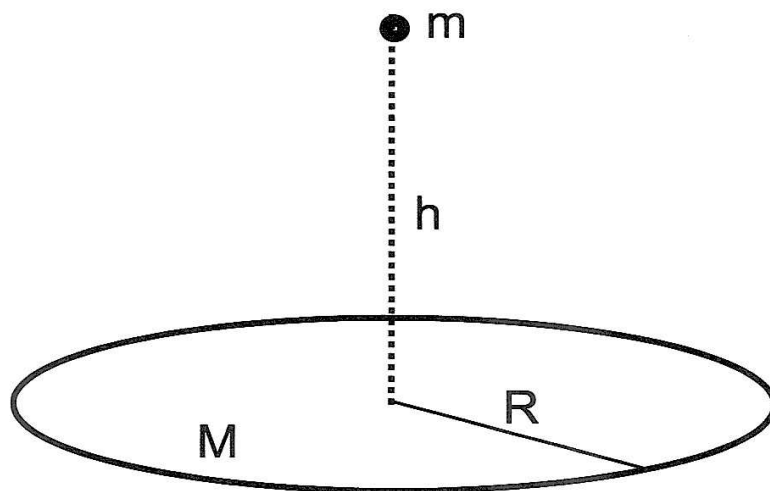


Figura V.12: Exercício 10

11. Repita o problema anterior considerando que, em lugar do círculo, você tenha a massa M distribuída uniformemente sobre uma placa circular de raio R .

12. Considere agora a massa m localizada no exterior de uma esfera de raio R e massa M . Calcule a força gravitacional sobre a massa m .

13. Em cada um dos itens abaixo, a é a aceleração de uma partícula movimentando-se sobre o eixo x . Calcule $v(t)$ e $x(t)$ considerando que em $t = 0$, $x = x_0$ e $v = v_0$ (as unidades não foram escritas explicitamente)

- (a) $a = 5$
- (b) $a = t$
- (c) $a = t^2$
- (d) $a = \sqrt[3]{2t+1}$
- (e) $a = (2t+1)^{-3}$

14. Nas relações abaixo, a é a aceleração do movimento de uma partícula sobre o eixo x . Calcule $v(t)$ e $x(t)$ em cada caso para as condições indicadas (as unidades também não foram escritas explicitamente)

- (a) $a = -4x$ em $t = 0$, $v = 0$ e $x = 5$
- (b) $a = -\sqrt{v}$ em $t = 0$, $v = 0$ e $x = 5$
- (c) $a = -3v^2$ em $t = 0$, $v = 6$ e $x = 0$

15*. Um corpo de massa m movimenta-se sobre o eixo x sob a ação de uma mola de constante elástica k (a força que a mola exerce sobre o corpo é $\vec{f} = -kx\hat{i}$). Considerando que em $t = 0$, $x = A$ e $v = 0$, obtenha $v(t)$.

16*. Calcule a força resultante sobre o vidro de um aquário de 70 cm de altura por 1 m de largura.

17. Calcule as seguintes integrais

- (a) $\int_0^1 \int_0^2 (x+2) dydx$
- (b) $\int_0^4 \int_0^x y dydx$
- (c) $\int_0^{-1} \int_{y+1}^{2y} xy dx dy$
- (d) $\int_1^2 \int_y^{y^2} (x+2y) dx dy$
- (e) $\int_0^2 \int_0^x (x^2 + y^2) dy dx$

Capítulo VI

Funções trigonométricas

1. Relações trigonométricas no triângulo retângulo

Primeiramente, relembremos as quantidades seno (sen), cosseno (cos), tangente (tg), secante (sec), cossecante (csc) e cotangente (cotg), baseadas nas relações trigonométricas do triângulo retângulo. Pelos dados da Figura VI.1, estas quantidades são

$$\text{sen } \theta = \frac{b}{a} \quad (\text{VI.1})$$

$$\text{cos } \theta = \frac{c}{a} \quad (\text{VI.2})$$

$$\text{tg } \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} = \frac{b}{c} \quad (\text{VI.3})$$

$$\text{cotg } \theta = \frac{1}{\text{tg } \theta} = \frac{c}{b} \quad (\text{VI.4})$$

$$\text{csc } \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta} = \frac{a}{b} \quad (\text{VI.5})$$

$$\text{sec } \theta = \frac{1}{\text{cos } \theta} = \frac{a}{c} \quad (\text{VI.6})$$

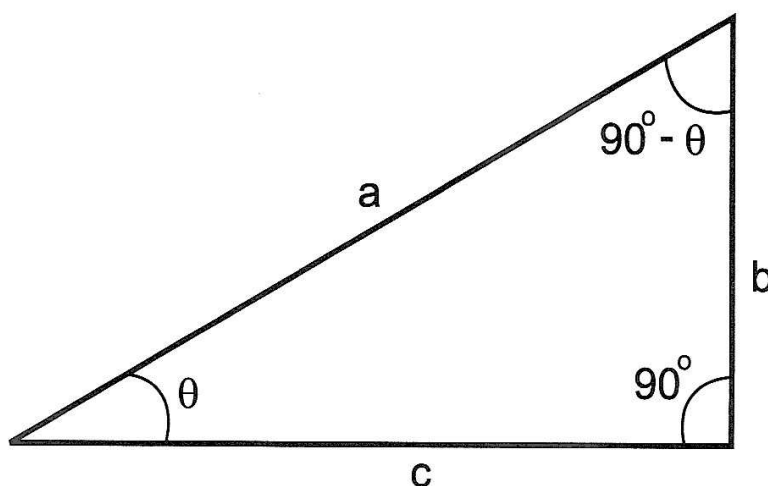


Figura VI.1: Triângulo retângulo: a é a hipotenusa, e b e c são os catetos.

Pelo que foi apresentado, podemos tirar algumas conclusões e fazer algumas observações.

(i) Vemos, facilmente, que os valores máximos do seno e cosseno são 1. Por outro lado, esses são os valores mínimos da secante e cossecante. Já a tangente e a cotangente podem adquirir qualquer valor.

(ii) Através do teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$ (no Apêndice B é feita uma demonstração deste teorema), podemos obter uma das mais importantes relações trigonométricas

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= a^2 \\ \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} &= 1 \\ \Rightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \end{aligned} \quad (\text{VI.7})$$

Que, na última passagem, usamos as definições de seno e cosseno dadas por (VI.1) e (VI.2) respectivamente.

(iii) Também, pelo triângulo da Figura VI.1, vemos diretamente que

$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{c}{a} = \cos \theta \quad (\text{VI.8})$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{b}{a} = \sin \theta \quad (\text{VI.9})$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \theta) = \frac{c}{b} = \operatorname{cotg} \theta \quad (\text{VI.10})$$

$$\sec(90^\circ - \theta) = \frac{a}{b} = \operatorname{csc} \theta \quad (\text{VI.11})$$

(iv) Estamos usando graus para expressar os ângulos de algumas das relações acima. É também bastante comum o uso de radianos. A definição de um ângulo em radiano é a razão entre o comprimento do arco e o raio (veja Figura VI.2)

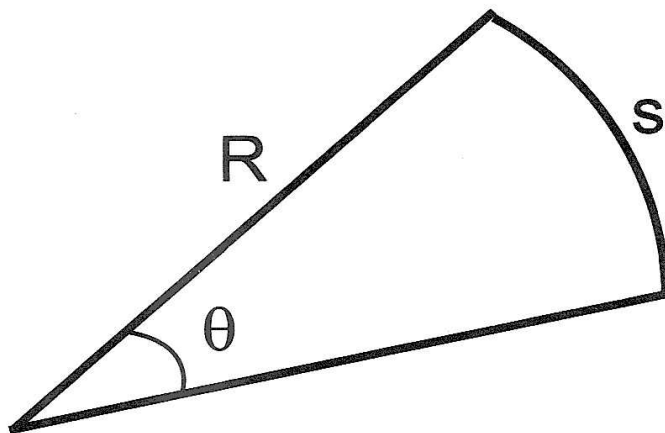


Figura VI.2: O arco s é subentendido pelo ângulo θ .

$$\theta = \frac{s}{R} \quad (\text{VI.12})$$

A relação entre graus e radianos é facilmente obtida considerando, por exemplo, que 90° correspondem a $1/4$ do comprimento da circunferência. Assim, o ângulo em radianos equivalente a 90° é

$$\theta = \frac{\frac{1}{4} \cdot 2\pi R}{R} = \frac{\pi}{2}$$

Outros exemplos são

$$\begin{array}{lcl} 30^\circ & \longleftrightarrow & \frac{\pi}{6} \\ 45^\circ & \longleftrightarrow & \frac{\pi}{4} \\ 60^\circ & \longleftrightarrow & \frac{\pi}{3} \\ \text{etc.} & & \end{array}$$

(v) As grandezas trigonométricas definidas através do triângulo retângulo ficam restritas a ângulos menores ou, no máximo, iguais a 90° e são todas positivas. Quando fizermos a extensão para considerá-las como funções, veremos que os ângulos podem adquirir qualquer valor (positivo ou negativo), e elas podem ser negativas também.

(vi) Podemos mostrar, com a utilização direta do que vimos acima, que num triângulo qualquer (veja Figura VI.3), temos as seguintes relações (exercício 1)

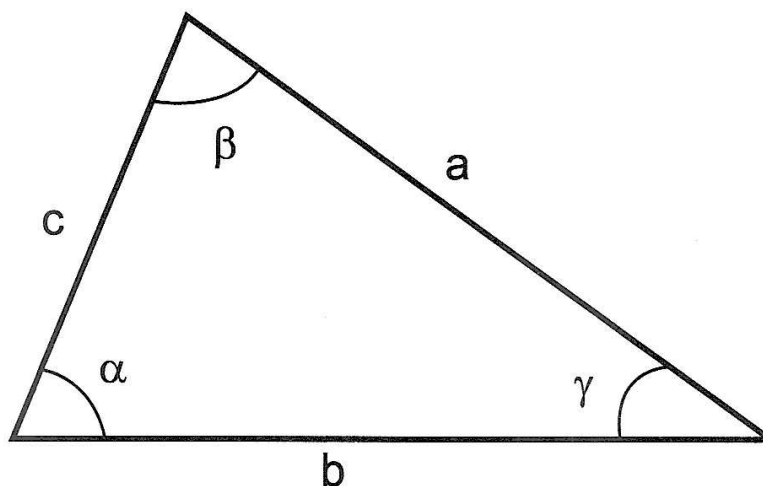


Figura VI.3: Exemplo de um triângulo qualquer

$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \beta}{b} = \frac{\text{sen } \gamma}{c} \quad (\text{VI.13})$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad (\text{VI.14})$$

conhecidas como leis dos senos e cossenos, respectivamente.

Tivemos a oportunidade de ver nos itens acima o aparecimento de algumas relações trigonométricas. Há outras, que veremos oportunamente. No momento, deixe-me citar uma que, talvez, seja bem familiar de vocês

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (\text{VI.15})$$

Há mais de uma maneira de se demonstrar esta expressão, inclusive uma muito simples com o uso de vetores (veja Apêndice A). Vamos demonstrá-la aqui de uma forma não muito usual, talvez um pouco mais trabalhosa, mas ficando restritos às relações métricas do triângulo retângulo.

Seja a Figura VI.4. Pelos triângulos retângulo OAC e OBC , podemos escrever

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} \\ &= \frac{\overline{OB} \cos \alpha}{\overline{OA}} \end{aligned}$$

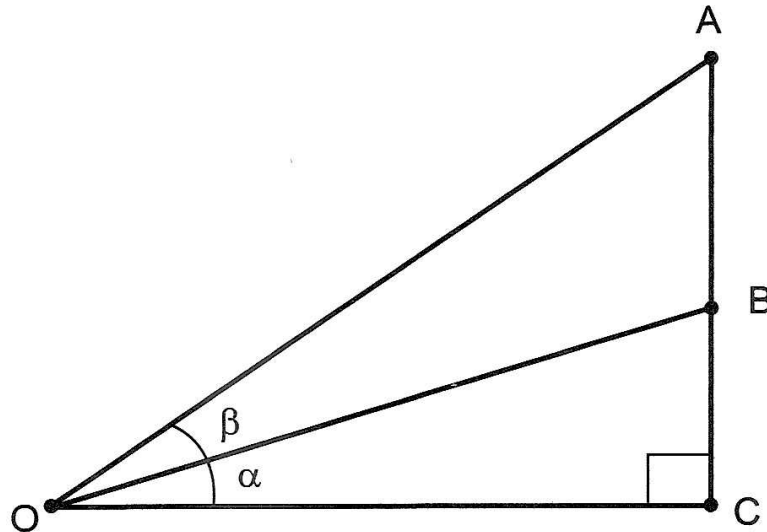


Figura VI.4: O vértice C subtende um ângulo de 90° .

Tracemos, agora, as linhas auxiliares (pontilhadas) mostradas na Figura VI.5, em que $\overline{AF}$ é paralela a $\overline{OE}$. Observando os triângulos formados, podemos reescrever a relação anterior da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} \cos \beta \cos \alpha \\ &= \frac{\overline{OA} - \overline{DA}}{\overline{OA}} \cos \alpha \cos \beta \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \frac{\overline{DA}}{\overline{OA}} \cos \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

Pelo triângulo retângulo OAE , temos

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{\overline{AE}}{\overline{OA}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\overline{AE}}$$

Substituindo este resultado na expressão anterior, vem

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \frac{\overline{DA}}{\overline{AE}} \operatorname{sen} \beta \cos \alpha \cos \beta$$

Pelo triângulo retângulo AEB , temos

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$$

Levando este resultado na expressão anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \frac{\overline{DA}}{\overline{AB}} \operatorname{sen} \beta \cos \beta \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} \operatorname{sen} \beta \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \end{aligned}$$

Na penúltima passagem acima usamos que $\overline{DA} \cos \alpha = \overline{AF}$, e na última usamos que $\operatorname{sen} \alpha = \overline{AF}/\overline{AB}$.

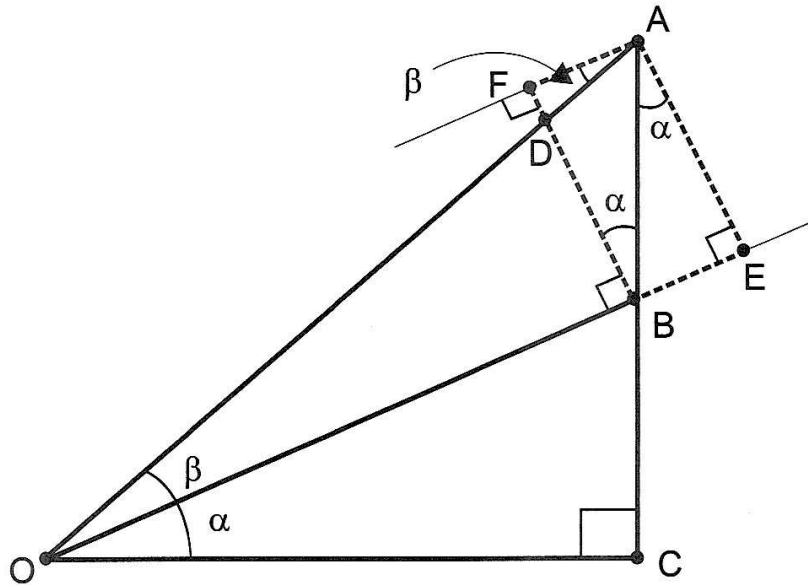


Figura VI.5: Traçado de linhas auxiliares

A outra relação, bastante conhecida,

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha \quad (\text{VI.16})$$

pode ser obtida pela combinação direta de (VI.9) e (VI.15). Entretanto, para tal, precisaríamos saber sobre seno e cosseno de ângulos negativos, o que implicaria conhecimentos dessas quantidades como funções. Vamos ver isto agora.

2. Seno, cosseno, tangente etc. como funções

Seja um certo ponto P do plano xy , como mostra a Figura VI.6. Usando diretamente as definições de seno e cosseno dadas por (VI.1) e (VI.2), podemos escrever

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\text{VI.17})$$

$$\text{cos } \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\text{VI.18})$$

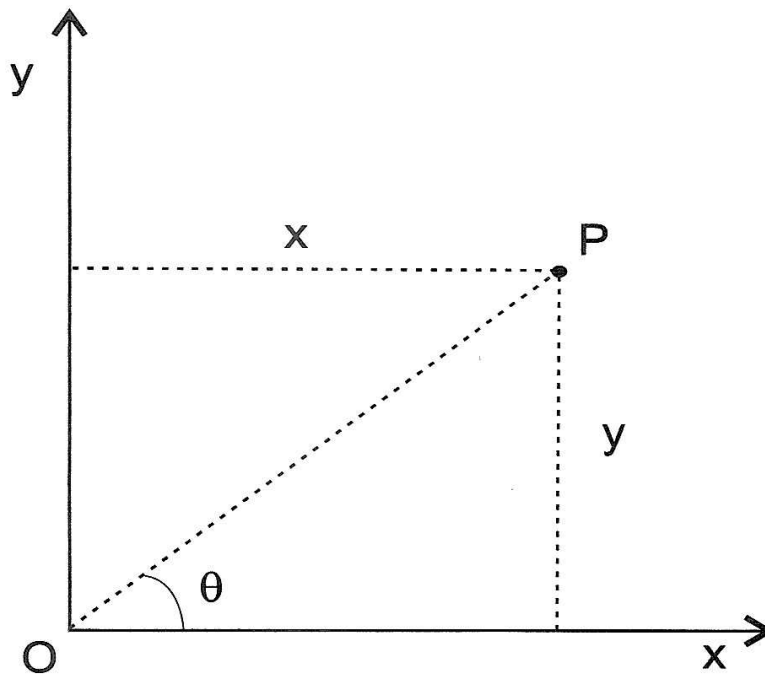


Figura VI.6: Ponto P no plano xy

Vamos ficar restritos ao seno e cosseno porque, como vimos, todas as outras funções podem ser escritas através delas.

Por questões de semelhança de triângulos, o valor de $\text{sen } \theta$ e $\text{cos } \theta$ não dependem da distância $\overline{OP}$ (obviamente, desde que esta não seja zero). É usual tomá-la como a unidade, pois as funções (VI.17) e (VI.18) ficam mais simples e convenientemente escritas como

$$y = \text{sen } \theta \quad (\text{VI.19})$$

$$x = \text{cos } \theta \quad (\text{VI.20})$$

Através destas relações (poderia também ser através das relações anteriores) e observando a Figura VI.6, vemos que os seno e cosseno não ficam restritos a ângulos menores ou iguais a 90° , como no caso do triângulo retângulo. Vemos diretamente que, para $90^\circ < \theta < 180^\circ$, $\text{sen } \theta > 0$ e $\text{cos } \theta < 0$. Para $180^\circ < \theta < 270^\circ$, ambos são negativos; para $270^\circ < \theta < 360^\circ$, $\text{sen } \theta < 0$ e $\text{cos } \theta > 0$.

É também diretamente visto pelas relações (VI.19) e (VI.20) e pela Figura VI.6 que

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen} \theta \quad (\text{VI.21})$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta \quad (\text{VI.22})$$

Agora sim, podemos deduzir a relação (VI.16), partindo de (VI.15)

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \cos[90^\circ - (\alpha + \beta)] \\ &= \cos[(90^\circ - \alpha) - \beta] \\ &= \cos(90^\circ - \alpha) \cos(-\beta) \\ &\quad - \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) \operatorname{sen}(-\beta) \\ &= \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha \end{aligned}$$

Outras relações podem ser obtidas, ou diretamente das funções seno e cosseno, dadas por (VI.19) e (VI.20) ou usando-se (VI.15) e (VI.16). Citemos apenas algumas:

$$\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \quad (\text{VI.23})$$

$$\operatorname{sen}(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha \quad (\text{VI.24})$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \quad (\text{VI.25})$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha \quad (\text{VI.26})$$

etc.

Para concluir esta seção, vamos mostrar mais uma expressão trigonométrica

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \quad (\text{VI.27})$$

Seja, então, a relação (VI.16), na qual fazemos as substituições $\alpha + \beta = A$ e $\alpha - \beta = B$ [$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}(A+B)$ e $\beta = \frac{1}{2}(A-B)$]. Assim

$$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \operatorname{sen} \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}$$

$$\operatorname{sen} B = \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \operatorname{sen} \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}$$

Somando as duas expressões acima, encontraremos (VI.27). Fica como exercício, mostrar que

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} \quad (\text{VI.28})$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \quad (\text{VI.29})$$

$$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2} \quad (\text{VI.30})$$

3. Alguns valores particulares de seno e cosseno

Pelo triângulo retângulo da Fig. VI.1, temos diretamente que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 0 &= \cos 90^\circ = 0 \\ \operatorname{sen} 90^\circ &= \cos 0 = 1\end{aligned}\tag{VI.31}$$

Outros valores particulares são

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\tag{VI.32}$$

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}\tag{VI.33}$$

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\tag{VI.34}$$

Esses valores podem ser obtidos através da geometria plana. Para o primeiro caso, consideramos um triângulo retângulo isósceles como mostra a Figura VI.7.

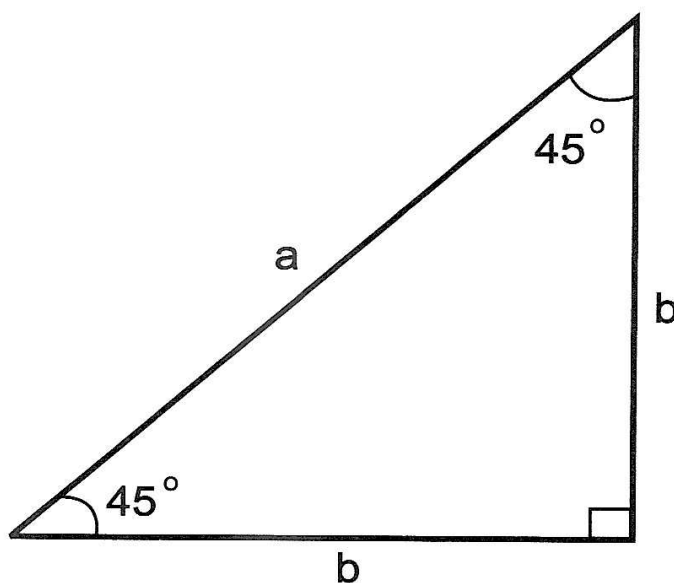


Figura VI.7: Triângulo retângulo isósceles

Usando o teorema de Pitágoras, os catetos b são diretamente obtidos em termos da hipotenusa

$$a^2 = 2b^2 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{a}{\sqrt{2}}\tag{VI.35}$$

Assim, usando a definição de seno, temos

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para os casos (VI.33) e (VI.34), consideremos o triângulo retângulo mostrado na Figura VI.8, no qual um dos catetos é a metade da hipotenusa (o nosso objetivo vai ser justamente mostrar que os ângulos não retos valem 30° e 60°).

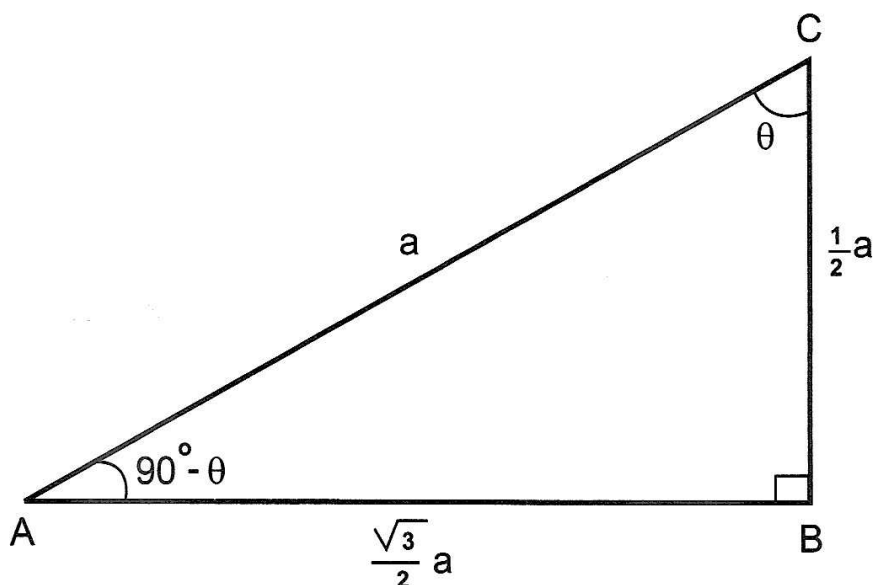


Figura VI.8: Triângulo retângulo com um cateto igual à metade da hipotenusa

Marquemos um ponto D no centro da hipotenusa e formemos os triângulos ABD e BCD , como está disposto na Figura VI.9. Vemos que o triângulo BCD é isósceles

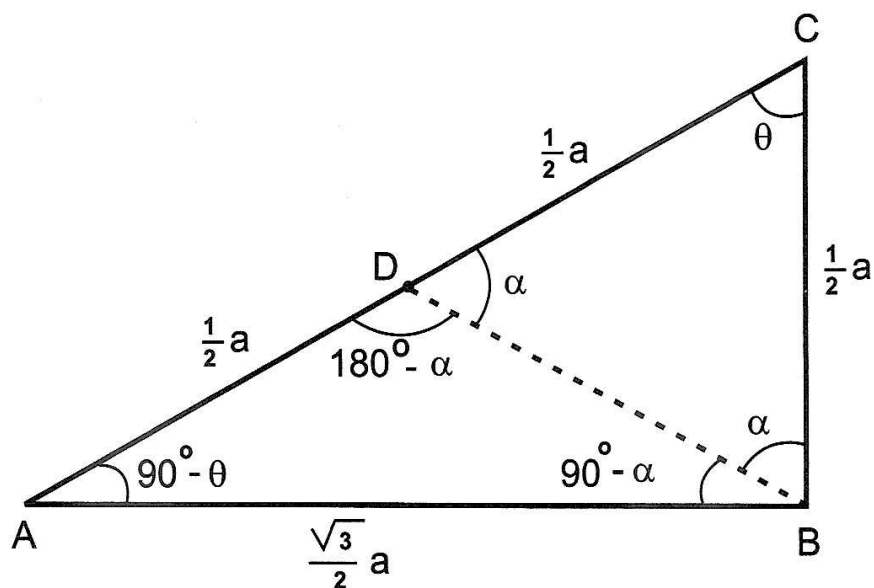


Figura VI.9: O ponto D divide a hipotenusa ao meio.

No triângulo ABD , pela lei dos senos, expressão (VI.13), temos

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{\frac{1}{2}a}{\sin(90^\circ - \alpha)}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen} \alpha} &= \frac{1}{\cos \alpha} \\ \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

Por outro lado, pelo triângulo retângulo inicial da Figura VI.8, temos que

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{3}$$

Logo, podemos concluir que $\theta = \alpha$ e pelo triângulo BCD temos que $\theta = \alpha = 60^\circ$, como queríamos demonstrar.

Usando esses resultados, podemos determinar os valores de seno e cosseno para alguns outros casos particulares. Por exemplo,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 15^\circ &= \operatorname{sen} (60^\circ - 45^\circ) \\ &= \operatorname{sen} 60^\circ \cos 45^\circ - \operatorname{sen} 45^\circ \cos 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)\end{aligned}\tag{VI.36}$$

A dúvida natural que podemos ter agora é como são obtidos os valores de seno, cosseno etc. para qualquer ângulo. Por exemplo, como se chegou à conclusão de que $\operatorname{sen} 40^\circ = 0,642787609\dots$?

Deixe-me dizer que existe uma expansão para $\operatorname{sen} x$ (com x expresso em radianos) que é dada por

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\tag{VI.37}$$

Esta relação corresponde ao que chamamos de desenvolvimento em série (de potências) da função $\operatorname{sen} x$ (veja Apêndice D). Este é um setor da Matemática no qual é mostrado que um conjunto do tipo $\{x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, \dots\}$ forma um conjunto completo para qualquer função contínua, isto é, qualquer função contínua pode ser escrita em termos desse conjunto ¹.

Por enquanto, a título de ilustração, mencionemos alguns outros desenvolvimento em série

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\tag{VI.38}$$

¹Para entender bem o que seja um conjunto completo, lembremos o caso dos vetores. Sabemos que qualquer vetor tridimensional pode ser escrito em termos dos vetores unitários $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$. Assim, esses unitários formam um conjunto completo para qualquer vetor do espaço tridimensional.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (\text{VI.39})$$

E $e = 2,71828\dots$ é a base do sistema de logaritmos naturais (que estudaremos no capítulo seguinte).

A propósito, verifique você mesmo que substituindo $x = \frac{2}{9}\pi = 0,6981\dots$ (40° em radianos) na relação (VI.37) o valor $\text{sen } 40^\circ = 0,6428\dots$ é obtido (a precisão do resultado depende, é claro, da precisão inicial usada para x).

4. Derivada de funções trigonométricas

Pelo que já vimos, basta que saibamos a derivada de uma das quantidades trigonométricas que todas as outras poderão ser deduzidas através dela. Vamos, então, obter a derivada de $\text{sen } x$. Para tal, como sempre fazemos, usamos diretamente a definição de derivada dada por (III.4). Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \text{sen } x &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen } x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x \cos \Delta x + \text{sen } \Delta x \cos x - \text{sen } x}{\Delta x} \\ &= \cos x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x} \end{aligned} \quad (\text{VI.40})$$

Na passagem para a segunda linha, usou-se a expansão de $\text{sen}(x + \Delta x)$, dada por (VI.16), e, na última, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \Delta x = 1$. O problema que nos resta é calcular o limite de $\text{sen } \Delta x / \Delta x$ quando $\Delta x \rightarrow 0$. Como vemos, o valor deste limite está oculto pelo símbolo de indeterminação $0/0$.

Não há muita dificuldade para ver quanto vale este limite. Basta lembrar da definição de um ângulo em radianos, visto na Fig. VI.2. Vamos refazer esta figura, incluindo o seno do ângulo (veja Figura VI.10). Podemos notar, sem precisar de muito rigor, que ao se fazer $\theta \rightarrow 0$ o arco s tende a coincidir com h . Assim,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{h/R}{s/R} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{h}{s} = 1 \quad (\text{VI.41})$$

Substituindo este resultado em (VI.40), temos a relação que dá a derivada de $\text{sen } x$

$$\frac{d}{dx} \text{sen } x = \cos x \quad (\text{VI.42})$$

Antes de tratarmos da derivada de outras funções trigonométricas, façamos algumas observações a fim de deixar bem claro o que vimos acima.

(i) Primeiramente, note que a substituição de $\text{sen } \theta$ por θ , quando $\theta \rightarrow 0$, está compatível com a expansão em série dada por (VI.37).

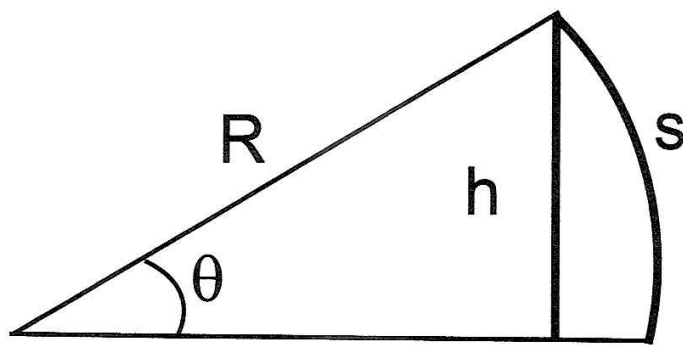


Figura VI.10: Arco e seno relativos a θ

(ii) A expressão (VI.42) é uma relação fundamental e a mais simples possível que podemos escrever. Quero dizer o seguinte. Vamos supor que no lugar de $\sin x$ você tenha $\sin u$, em que $u = u(x)$. A derivada de $\sin u$ em relação a x é dada (como você deve se lembrar) por [veja (III.14) – regra da cadeia]

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \sin u &= \frac{d}{du} \sin u \frac{du}{dx} \\ &= \cos u \frac{du}{dx}\end{aligned}\tag{VI.43}$$

Por exemplo,

$$\frac{d}{dx} \sin x^2 = (\cos x^2) 2x = 2x \cos x^2$$

(iii) Considere, agora, que você queira derivar, em relação a x , não $\sin x$, mas $\sin^4 x$. Também não há dificuldades. Já vimos isto no Capítulo III (novamente a regra da cadeia).

$$\frac{d}{dx} \sin^4 x = 4 \sin^3 x \frac{d}{dx} \sin x = 4 \sin^3 x \cos x$$

Após estas observações, podemos seguir em frente. Passemos ao cálculo da derivada de $\cos x$. Para tal, como já sabemos a derivada de $\sin x$, precisamos de qualquer relação envolvendo $\sin x$ e $\cos x$. A primeira que vimos foi $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, dada por (VI.7). Vamos, então, calcular a derivada de $\cos x$ a partir dela. Não é necessário escrever, por exemplo, $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ (caso o fizéssemos, teríamos de considerar também $\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x}$). Vamos partir diretamente da relação inicial e derivar os dois termos em relação a x

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} \sin^2 x + \frac{d}{dx} \cos^2 x &= 0 \\ \Rightarrow 2 \sin x \frac{d}{dx} \sin x + 2 \cos x \frac{d}{dx} \cos x &= 0 \\ \Rightarrow \sin x \cos x + \cos x \frac{d}{dx} \cos x &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} \cos x &= -\sin x\end{aligned}\tag{VI.44}$$

É claro que poderíamos ter usado qualquer outra relação envolvendo $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$. O resultado tem de ser o mesmo. Por exemplo, se tivéssemos partido de (VI.8), teríamos

$$\begin{aligned}\cos x &= \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} \cos x &= \frac{d}{dx} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \\ &= \operatorname{sen} x (-1) \\ &= -\operatorname{sen} x\end{aligned}$$

Caso usássemos (VI.24), viria

$$\begin{aligned}\cos x &= \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} \cos x &= \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \\ &= -\operatorname{sen} x\end{aligned}$$

Fica como exercício mostrar que

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \sec^2 x \quad (\text{VI.45})$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cotg} x = -\csc^2 x \quad (\text{VI.46})$$

$$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \operatorname{tg} x \quad (\text{VI.47})$$

$$\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \operatorname{cotg} x \quad (\text{VI.48})$$

Consideremos mais um exemplo. Vamos supor que seja pedido para você calcular a derivada de $\theta = \operatorname{arcsen} x$. Também aqui não haverá dificuldade alguma se for lembrado que esta é a forma inversa da função $x = \operatorname{sen} \theta$ e que

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta$$

$d\theta/dx$, é o inverso do resultado acima.

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dx} &= \frac{1}{dx/d\theta} \\ &= \frac{1}{\cos \theta}\end{aligned}\tag{VI.49}$$

Se você quiser que o resultado final seja expresso em termos de x [apenas por consistência pois sua função inicial era $\theta(x) = \arcsen x$], tem-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \arcsen x &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sen^2 \theta}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\end{aligned}\tag{VI.50}$$

que é a forma como é apresentada nas tabelas de derivadas.

Só com o intuito de deixar bem claro este ponto, vamos obter novamente a relação (VI.50), mas partindo diretamente da relação $x = \sen \theta$ e derivando os dois lados em relação à variável x

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} x &= \frac{d}{dx} \sen \theta \\ \Rightarrow 1 &= \cos \theta \frac{d\theta}{dx} \\ \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} &= \frac{1}{\cos \theta} \\ \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\end{aligned}$$

Deixo também como um exercício, vocês mostrarem que

$$\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\tag{VI.51}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1 + x^2}\tag{VI.52}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccotg} x = \frac{1}{1 + x^2}\tag{VI.53}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}\tag{VI.54}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}\tag{VI.55}$$

5. Exemplo de aplicação de derivadas de funções trigonométricas

Como aplicação de derivadas de funções trigonométricas, voltemos ao exemplo discutido no Capítulo IV, do corpo lançado do topo de um prédio de altura h , com velocidade de módulo v_o e fazendo um ângulo θ com a horizontal (veja Figura IV.5). Naquela oportunidade, achamos que o alcance A atingido pelo corpo, medido a partir da base do prédio, era dado por [veja expressão (IV.21)]

$$A = \frac{v_o \cos \theta}{g} \left(v_o \sin \theta + \sqrt{v_o^2 \sin^2 \theta + 2gh} \right) \quad (\text{VI.56})$$

E o nosso objetivo era calcular θ para que o alcance fosse máximo. Na época, não fizemos os cálculos por falta de conhecimentos da derivada de seno e cosseno. Como isto não é mais problema para nós, vamos fazer os cálculos agora.

O alcance A é uma função de θ . Pelo que já vimos sobre máximos e mínimos, no ponto em que A é o máximo, $\frac{dA}{d\theta} = 0$. Aqui, não há dúvidas de que realmente $\frac{dA}{d\theta} = 0$ leve a um valor de alcance máximo, pois é fácil ver que o caso de alcance mínimo ($A = 0$) ocorre para $\theta = 90^\circ$.

O que temos que fazer, então, é calcular a derivada $\frac{dA}{d\theta}$ e igualar o resultado a zero. Assim,

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \sin \theta \sqrt{\sin^2 \theta + k} + \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + k}} = 0 \quad (\text{VI.57})$$

Em que fizemos $\frac{2gh}{v_o^2} = k$ apenas por questão de simplificação.

Para resolver a equação acima, podemos olhar a incógnita como sendo, por exemplo, $\sin \theta$. Faça isto você mesmo. Chame $\sin \theta$ de u e resolva a equação obtida para a variável u . Vamos seguir um outro caminho. Com um pouco de observação sobre (VI.57), notamos que ela pode ser reescrita como

$$\left(\sin \theta + \sqrt{\sin^2 \theta + k} \right) \left(-\sin \theta + \frac{\cos^2 \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + k}} \right) = 0 \quad (\text{VI.58})$$

O primeiro fator não pode ser zero porque, pela natureza do problema, $\sin \theta$ é positivo. Então, para que a equação (VI.58) seja satisfeita, é o segundo fator que deve se anular,

$$-\sin \theta + \frac{\cos^2 \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + k}} = 0 \quad (\text{VI.59})$$

Resolvendo esta equação, considerando que a variável seja $\sin \theta$, encontramos

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{gh}{v_o^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{VI.60})$$

Note que $\sin \theta$ só é igual a $\sqrt{2}/2$ (que corresponderia a $\theta = 45^\circ$) se $h = 0$.

6. Integrais envolvendo funções trigonométricas

Pelo que vimos sobre derivadas de funções trigonométricas, principalmente as relações (VI.42) e (VI.44), podemos escrever diretamente duas integrais básicas

$$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C \quad (\text{VI.61})$$

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C \quad (\text{VI.62})$$

Naturalmente, observando (VI.45) – (VI.48), bem como (VI.50) – (VI.55), poderíamos escrever outras, $\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + C$; $\int \sec x \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + C$; $\int dx/\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arcsen} x + C$ etc. Aliás, como sabemos, basta conhecer a expressão de qualquer derivada que podemos escrever uma expressão para a integral correspondente. Há estudantes que, inadvertidamente, julgam necessário decorar o maior número possível delas. **É perda de tempo e mal uso da mente.** É claro que, com a prática de se manusear derivadas, podemos saber de cor o resultado de algumas integrais não triviais. Vejo isto apenas como uma questão de prática e não como uma necessidade. Assim como fizemos no Capítulo V, no qual calculamos todas as integrais, envolvendo funções de potência, usando apenas uma como referência, a expressão (V.26), adicionaremos, aqui, aos nossos conhecimentos, apenas as duas integrais acima, (VI.61) e (VI.62), que, mesmo sem muita prática, já são resultados bem familiares.

Vamos a seguir apresentar o cálculo de algumas integrais.

(i) Seja a integral

$$I_1 = \int \operatorname{sen}^2 x \, dx \quad (\text{VI.63})$$

Olhando para ela com um pouco de cuidado, você verá que o impulso de usar a relação fundamental do capítulo anterior, $\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C$, não é apropriado pois du seria $\cos x \, dx$ e não há nenhum cosseno em (VI.63). Então, a pergunta sobre o que derivamos em relação x que dá $\operatorname{sen}^2 x$ parece não ter resposta tão direta.

Pela experiência adquirida no Capítulo V, no cálculo de integrais, o que faremos é procurar modificar o integrando de tal maneira que a resposta à pergunta básica do cálculo integral possa ter resposta.

Modificaremos, então, o integrando da relação (VI.63). Para tal, usamos (VI.15), onde fazemos $\alpha = \beta = x$, isto é,

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \quad (\text{VI.64})$$

e a combinamos com a conhecida relação da trigonometria

$$1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x \quad (\text{VI.65})$$

O resultado é

$$1 - \cos 2x = 2 \operatorname{sen}^2 x \quad (\text{VI.66})$$

Como vemos, a relação acima permite a substituição de $\operatorname{sen}^2 x$ por $\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$. Assim, em lugar de (VI.63), temos a integral equivalente

$$I_1 = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx \quad (\text{VI.67})$$

cuja solução é obtida sem dificuldade. Assim, a solução da integral inicial é

$$\int \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C \quad (\text{VI.68})$$

Não deixe de verificar, caso esteja com alguma dúvida, que derivando o lado direito de (VI.68), obtém-se realmente $\operatorname{sen}^2 x$.

(ii) É claro que pode haver mais de um meio de se fazer a modificação do integrando para tentar a solução da integral. Uns podem levar a soluções mais simples que outras (às vezes, até, pode não levar à solução alguma). A substituição que fizemos para resolver (VI.63) permitiu-nos uma solução sem maiores dificuldades. A título de ilustração, vamos resolvê-la através de uma outra modificação, cujo processo será útil no cálculo de outras integrais.

Façamos, então,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 x dx &= \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x dx \\ &= -\operatorname{sen} x d(\cos x) \\ &= -d(\operatorname{sen} x \cos x) + \cos x d(\operatorname{sen} x) \\ &= -d(\operatorname{sen} x \cos x) + \cos^2 x dx \\ &= -d(\operatorname{sen} x \cos x) + (1 - \operatorname{sen}^2 x) dx \\ &= -d(\operatorname{sen} x \cos x) + dx - \operatorname{sen}^2 x dx \\ \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x dx &= \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} d(\operatorname{sen} x \cos x) \end{aligned} \quad (\text{VI.69})$$

Substituindo em (VI.63), obteremos duas integrais (bem triviais)

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^2 x dx &= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int d(\operatorname{sen} x \cos x) \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x \cos x + C \end{aligned} \quad (\text{VI.70})$$

É claro que as soluções (VI.68) e (VI.70) são idênticas (como não poderia deixar de ser), pois $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$ [veja (VI.16) fazendo $\alpha = \beta = x$].

A propósito, o que fizemos acima foi uma integração por partes.

(iii) Seja a integral

$$I_2 = \int \sin^4 x \, dx \quad (\text{VI.71})$$

Poderíamos escrever $\sin^4 x = \sin^2 x \sin^2 x$, usar (VI.66) e tentar um desenvolvimento parecido com o que fizemos no item (i). Vou deixar este caminho para vocês. Ele funciona. Vou seguir o que fizemos no item (ii).

$$\begin{aligned} \sin^4 x \, dx &= \sin^3 x \sin x \, dx \\ &= -\sin^3 x \, d(\cos x) \\ &= -d(\sin^3 x \cos x) + \cos x \, d(\sin^3 x) \\ &= -d(\sin^3 x \cos x) + 3 \cos^2 x \sin^2 x \, dx \\ &= -d(\sin^3 x \cos x) + 3(1 - \sin^2 x) \sin^2 x \, dx \\ &= -d(\sin^3 x \cos x) + 3 \sin^2 x \, dx - 3 \sin^4 x \, dx \\ \Rightarrow \sin^4 x \, dx &= \frac{3}{4} \sin^2 x \, dx - \frac{1}{4} d(\sin^3 x \cos x) \end{aligned} \quad (\text{VI.72})$$

Pela relação acima, vemos que a integral (VI.71) recairá na integral que vimos anteriormente. Assim, usando aquele resultado, temos

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \, dx &= \frac{3}{4} \int \sin^2 x \, dx - \frac{1}{4} \int d(\sin^3 x \cos x) \\ &= \frac{3}{8} x - \frac{1}{8} \sin x \cos x - \frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + C \end{aligned} \quad (\text{VI.73})$$

Por este desenvolvimento é fácil perceber que o cálculo de qualquer integral do tipo $\int \sin^n x \, dx$ (ou $\int \cos^n x \, dx$), para n par, sempre recai numa integral $\int \sin^{n-2} x \, dx$ (ou $\int \cos^{n-2} x \, dx$). No caso de n ímpar, a solução é mais direta (veja exercícios).

Você se lembra do que falei sobre decorar relações de derivadas para saber qual a integral correspondente? Por exemplo, você poderia decorar que derivando-se $\frac{3}{8} x - \frac{1}{8} \sin x \cos x - \frac{1}{4} \sin^3 x \cos x$ dá $\sin^4 x$ e, assim, saber de cor $\int \sin^4 x \, dx$. Mesmo que você consiga fazer isto para alguns casos, você não irá muito longe. Há um número infinito delas.

Você pode então perguntar, por exemplo, como vou saber que $\int \sec^2 x \, dx$ dá $\tan x + C$ se não lembrar da relação (VI.45)?

Como disse, nada impede que você, com alguma prática, acabe sabendo um certo número de integrais de cor. É até natural que isto aconteça. Entretanto, por questões didáticas, vamos considerar, pelo menos por enquanto, só as três integrais que estamos usando, (V.26), (VI.61) e (VI.62). Qualquer integral

correspondente às derivadas (VI.45)–(VI.48) e (VI.50)–(VI.55), podem ser feitas com o uso de relações trigonométricas e das integrais acima mencionadas. Veremos alguns exemplos no final desta seção e deixaremos o restante para ser feito como exercício.

(iv) No capítulo anterior, vimos integrais em que apareciam raiz quadrada em termos do tipo $x\sqrt{1+x^2}$ e $x^3\sqrt{1+x^2}$. Não vimos nenhuma só com $\sqrt{1+x^2}$ ou $\sqrt{1-x^2}$. Isto porque a relação fundamental que estávamos usando, (V.26), não se aplicava nestes casos. Agora, com o conhecimento de algumas relações trigonométricas, é possível fazer modificações nos integrandos correspondentes, de forma tal que as integrais possam ser resolvidas. Vamos ver dois exemplos aqui. Outros serão propostos como exercícios.

Primeiramente, consideremos a integral

$$I_3 = \int \sqrt{1-x^2} dx \quad (\text{VI.74})$$

Com o uso da relação (VI.7), podemos facilmente mudar o integrando de (VI.74) e cair numa outra integral sem a raiz quadrada. Fazendo, então,

$$x = \text{sen } \theta$$

temos

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x^2} &= \sqrt{1-\text{sen}^2 \theta} = \cos \theta \\ \text{e } dx &= \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

substituindo estas quantidades em (VI.74), obtemos

$$I_3 = \int \cos^2 \theta d\theta \quad (\text{VI.75})$$

Como vemos, com a substituição de x por $\text{sen } \theta$, caímos numa integral que sabemos resolver. É também oportuno dizer que esta substituição está compatível com a natureza da variável x que aparece na expressão inicial, pois $\sqrt{1-x^2}$ implica que $-1 \leq x \leq 1$, e $x = \text{sen } \theta$ (poderia ser $x = \cos \theta$) só é definida dentro desta mesma região.

A solução de (VI.75) é similar ao que fizemos para resolver $\int \text{sen}^2 \theta d\theta$. O resultado é

$$\int \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \text{sen } 2\theta + C \quad (\text{VI.76})$$

Usando novamente $x = \text{sen } \theta$, podemos voltar à variável inicial. Temos então,

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \text{arc sen } x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C \quad (\text{VI.77})$$

A outra integral que consideraremos é

$$I_4 = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} \quad (\text{VI.78})$$

Agora, a substituição não pode ser a que fizemos no caso anterior (note que a variável x não está mais restrita aos limites ± 1). Entretanto, podemos usar a mesma relação (VI.7) para fazer uma outra substituição. Dividindo-se ambos os lados de (VI.7) por $\cos^2 \theta$, obtemos,

$$1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta \quad (\text{VI.79})$$

Poderíamos ter dividido por $\sin^2 \theta$ também. Neste caso, o resultado seria

$$1 + \operatorname{cotg}^2 \theta = \csc^2 \theta \quad (\text{VI.80})$$

Tanto faz usar uma como a outra. Vamos nos apoiar em (VI.79). Assim, substituindo no integrando de (VI.78) x por $\operatorname{tg} \theta$, temos

$$\begin{aligned} 1 + x^2 &= \sec^2 \theta \\ \text{e } dx &= d\operatorname{tg} \theta = \sec^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

Levando essas quantidades na relação inicial (VI.78), a integral I_4 fica

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \frac{\sec^2 \theta}{\sec^3 \theta} d\theta \\ &= \int \cos \theta d\theta \\ &= \sin \theta + C \end{aligned} \quad (\text{VI.81})$$

Para voltar à variável inicial x , temos de escrever $\sin \theta$ em termos de $\operatorname{tg} \theta$.

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{1}{\csc \theta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \theta}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 1/\operatorname{tg}^2 \theta}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 1/x^2}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \end{aligned} \quad (\text{VI.82})$$

Portanto,

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C \quad (\text{VI.83})$$

(v) Vários outros exemplos serão apresentados nos exercícios. Vamos, agora, para completar esta parte prática de cálculo de integrais envolvendo (também) funções trigonométricas, voltar à pergunta que tinha feito acima, referindo-se às relações (VI.45)–(VI.48) e (VI.50)–(VI.55), como vou saber, por exemplo, que a integral de $\sec x \operatorname{tg} x$ é $\sec x$ se não souber de cor a relação (VI.47).

Vamos responder esta pergunta em particular (deixaremos as demais respostas para os exercícios). Mostraremos, então, que

$$\int \sec x \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + C \quad (\text{VI.84})$$

Desenvolvendo convenientemente o integrando da relação acima, temos

$$\begin{aligned} \sec x \operatorname{tg} x \, dx &= \frac{1}{\cos x} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx \\ &= -\cos^{-2} x \, d \cos x \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int \sec x \operatorname{tg} x \, dx &= -\int \cos^{-2} x \, d \cos x \\ &= \frac{1}{\cos x} + C \\ &= \sec x + C \end{aligned}$$

Para finalizar, seja um dos exemplos de (VI.50)–(VI.55) (os demais também ficarão para os exercícios). Mostraremos aqui que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + C \quad (\text{VI.85})$$

Pelo que já vimos, a solução da integral acima sugere diretamente uma substituição trigonométrica do tipo $x = \operatorname{sen} \theta$. Assim $\sqrt{1-x^2} = \cos \theta$ e $dx = \cos \theta \, d\theta$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int d\theta \\ &= \theta + C \\ &= \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + C \end{aligned}$$

Apenas por questão de consistência, para a solução apresentada acima, deixe-me fazer um comentário. Nós substituímos x por $\sin \theta$ no integrando e achamos que o resultado foi $\arcsin x + C$. Naturalmente, poderíamos ter substituído x por $\cos \theta$. O resultado, é claro, tem de ser o mesmo. Vejamos.

Se tivéssemos substituído x por $\cos \theta$, teríamos $\sqrt{1-x^2} = \sin \theta$ e $dx = -\sin \theta d\theta$. Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\int d\theta \\ &= -\theta + C \\ &= -\arccos x + C\end{aligned}$$

A resposta encontrada, embora de aspecto diferente, é igual à anterior, a menos de uma constante (o que, para o resultado da integral, é irrelevante). Vejamos. Na penúltima passagem acima, podemos, perfeitamente, substituir o resultado encontrado por $\frac{\pi}{2} - \theta + C'$. No qual C' é uma outra constante. Como vimos na relação (VI.8), se θ é o arco cujo cosseno vale x , $\frac{\pi}{2} - \theta$ é o arco cujo seno vale x . Portanto, como não poderia deixar de ser, as duas respostas são realmente equivalentes.

7. Exemplo de integrais na geometria

O que fizemos no item anterior nada mais foi do que praticar o cálculo de integrais envolvendo (ou usando) funções trigonométricas. Vamos, nesta seção, bem como nas seguintes, voltar nossa atenção para as aplicações.

Acho oportuno relembrar o início da seção 5 do capítulo anterior, quando sintetizamos, em três etapas, o processo de integração, aplicado a um determinado problema. Esses itens eram:

- Identificar o elemento infinitesimal a ser integrado.
- Preparar este elemento de forma que a integração possa ser feita. Isto é, ele deve ser do tipo $f(u) du$. Em que u , como já dissemos, é uma variável genérica qualquer.
- Por fim, após ter preparado o elemento diferencial para ter a forma $f(u) du$, você tem de saber qual função cuja derivada em relação a u dá $f(u)$.

(i) Como primeira aplicação, vamos usar a integral para calcular a área de um círculo de raio R e ver como ela nos leva à conhecida relação πR^2 .

O primeiro passo é identificar no círculo o elemento diferencial que vamos integrar. Veja Figura VI.11, na qual identificamos o elemento diferencial como sendo um retângulo de altura y e largura dx . Portanto, o elemento de área é

$$dA = y dx \tag{VI.86}$$

O próximo passo é prepará-lo, isto é, escrevê-lo da forma $f(x) dx$ para que a integração possa ser feita. Como y corresponde a pontos da periferia do círculo,

podemos usar a equação $x^2 + y^2 = R^2$ para obter y em função de x , ou seja, $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Substituindo este resultado em (VI.86), temos

$$dA = \sqrt{R^2 - x^2} dx \quad (\text{VI.87})$$

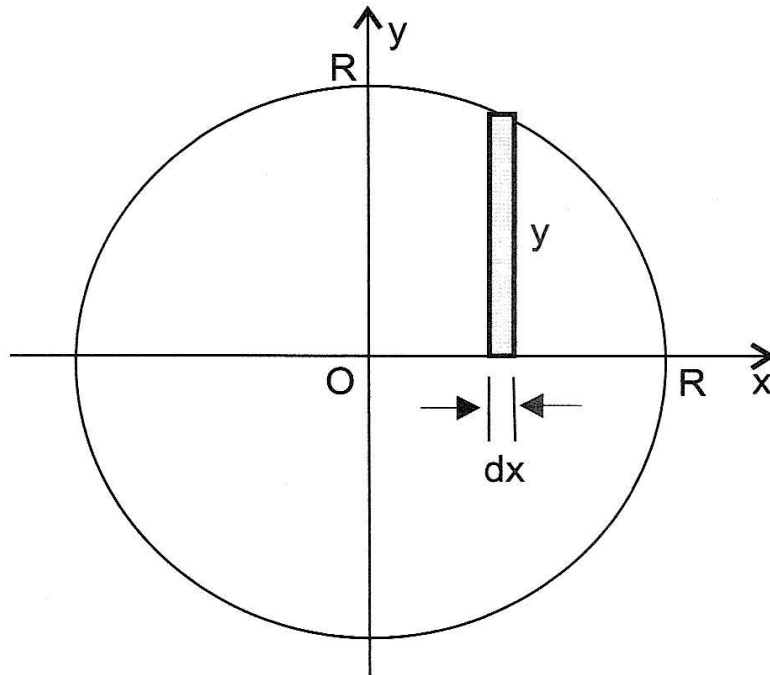


Figura VI.11: Elemento diferencial no círculo de raio R

Pronto! o elemento diferencial está em condições de ser integrado. Como estamos interessados no cálculo da área (um problema que só interessa o módulo dos resultados), podemos aproveitar a simetria da figura e integrar apenas no primeiro quadrante (onde é tudo positivo) e multiplicar o resultado por quatro. Assim, podemos escrever que a área do círculo é dada por

$$A = 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx \quad (\text{VI.88})$$

Esta integral nos é familiar. Ela apareceu nos vários exemplos mostrados na seção anterior. Para calculá-la, fazemos a substituição trigonométrica $x = R \sin \theta$, o que acarreta $\sqrt{R^2 - x^2} = R \cos \theta$ e $dx = R \cos \theta d\theta$. Assim, a integral de (VI.88) transforma-se em

$$\int \sqrt{R^2 - x^2} dx = R^2 \int \cos^2 \theta d\theta \quad (\text{VI.89})$$

No final, quando voltarmos à variável inicial, colocaremos novamente os limites de integração. A substituição trigonométrica aqui nos levou a uma integral de $\cos^2 \theta d\theta$. Esta integral também já foi resolvida na seção anterior [veja (VI.76)]. O resultado é

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{R^2 - x^2} dx &= R^2 \int \cos^2 \theta d\theta \\
&= \frac{R^2}{2} \theta + \frac{R^2}{4} \sin 2\theta + C \\
&= \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{x}{R} + \frac{1}{2} x \sqrt{R^2 - x^2} + C
\end{aligned} \tag{VI.90}$$

Em que, na última passagem, voltamos à variável inicial x . Assim, agora que sabemos o resultado da integral que aparece em (VI.88), podemos substituir os limites correspondentes e calcular a área do círculo,

$$\begin{aligned}
A &= 4 \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{x}{R} \Big|_0^R + 4 \frac{1}{2} x \sqrt{R^2 - x^2} \Big|_0^R \\
&= 2R^2 \frac{\pi}{2} \\
&= \pi R^2
\end{aligned}$$

(ii) No capítulo anterior, quando fizemos uma aplicação de integrais no cálculo do volume da esfera, vimos que, dependendo da escolha do elemento diferencial, os cálculos poderiam se tornar mais simples num caso que noutro. Aqui não é diferente. Embora o cálculo acima, para obter a área do círculo, não tenha sido complicado (pelo contrário, usamos diretamente resultados vistos na seção anterior) poderia, mesmo assim, ter sido mais simples.

O (pouco) trabalho a mais que tivemos foi porque usamos coordenadas cartesianas retangulares. Poderia haver mais simplicidade se tivéssemos usado um tipo de coordenada mais adequado à geometria do problema. No caso, essas coordenadas seriam as chamadas coordenadas polares. Estas são as coordenadas r e θ mostradas na Figura VI.12, na qual vemos que o ponto P , usualmente localizado pelas coordenadas cartesianas (x, y) , pode também ser perfeitamente localizado por elas. Para se ter uma ideia da simplicidade do uso de coordenadas polares no problema que estudamos, basta lembrar que a equação do círculo de raio R , em coordenadas polares, é dada simplesmente por $r = R$, comparativamente ao caso de $x^2 + y^2 = R^2$ das coordenadas cartesianas. Obviamente, se a figura fosse de simetria retangular, as coordenadas cartesianas poderiam ser mais adequadas.

(iii) Voltemos ao cálculo da área do círculo, mas usando agora coordenadas polares. Vou começar com o elemento diferencial mostrado na Figura VI.13 (aproximadamente um retângulo infinitesimal de lados $r d\theta$ e dr).

$$\begin{aligned}
dA &= r d\theta dr \\
&= r dr d\theta
\end{aligned} \tag{VI.91}$$

O fato de haver duas quantidades infinitesimais (dr e $d\theta$) não é problema para a gente. Este é um caso (simples) de integração dupla, visto na Seção 6

do capítulo anterior. Os limites são zero e R para r e zero e 2π para θ . Como a integral de uma variável não interfere com a da outra temos, então, que a área é dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_0^R r \, dr \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^R \theta \Big|_0^{2\pi} \\ &= \pi R^2 \end{aligned}$$

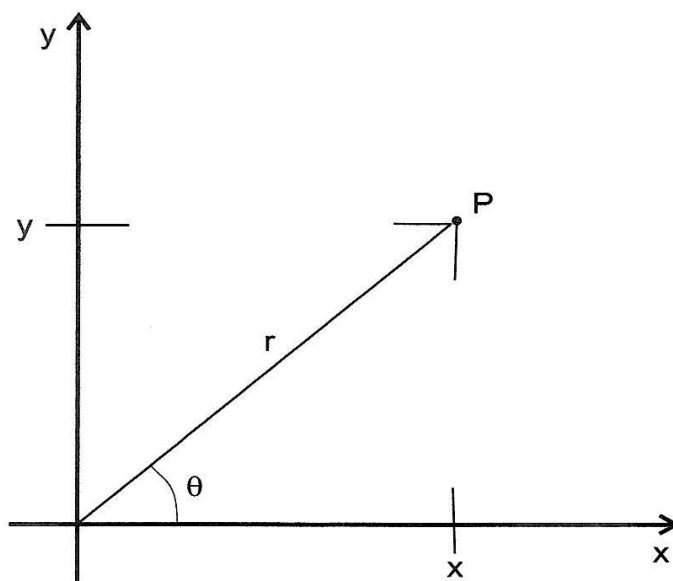


Figura V.12: Coordenadas cartesianas e polares

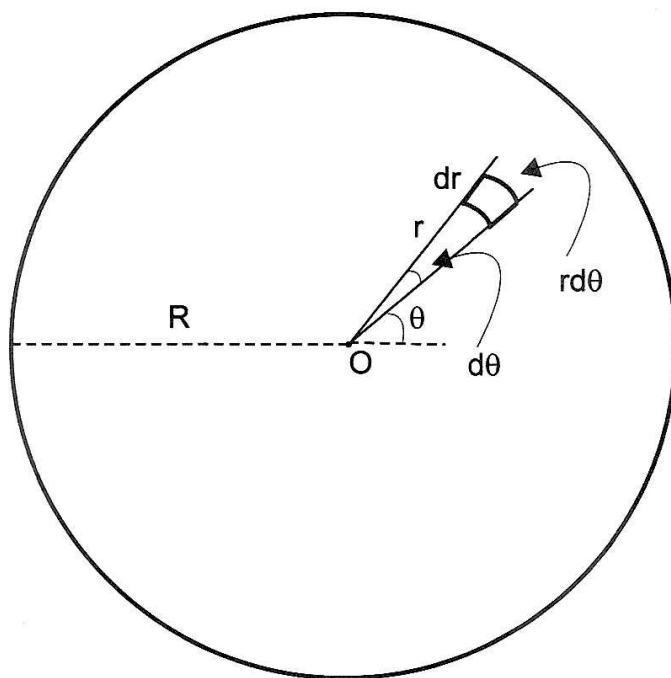


Figura VI.13: Elemento de área em coordenadas polares

(iv) Poderíamos ter calculado a área do círculo usando coordenadas polares sem recorrer à integração dupla? A resposta é sim. As Figuras VI.14 e VI.15 mostram dois elementos diferenciais em coordenadas polares correspondentes a integrais simples.

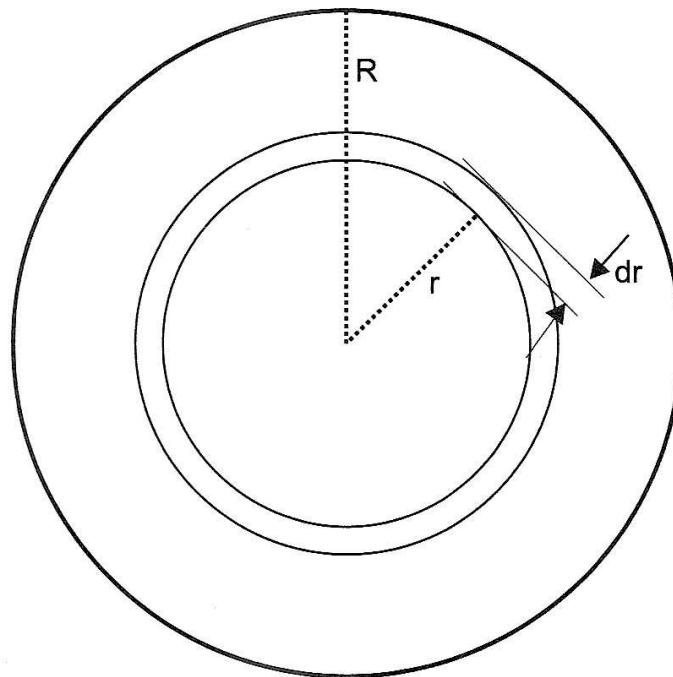


Figura VI.14: Exemplo de elemento de área

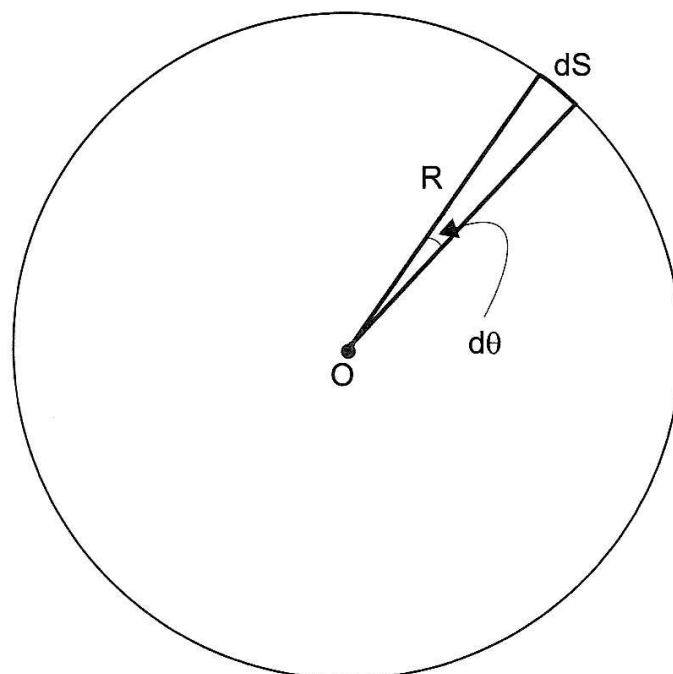


Figura VI.15: Outro exemplo de elemento de área

No caso da Figura VI.14, o elemento de área é uma tira de comprimento $2\pi r$ e largura dr . Assim,

$$dA = 2\pi r dr \quad (\text{VI.92})$$

e o cálculo da área é

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^R r \, dr \\ &= \pi r^2 \Big|_0^R \\ &= \pi R^2 \end{aligned}$$

Para a Figura VI.15, o elemento de área é um triângulo de base $ds = R \, d\theta$ e altura R . Portanto, neste caso,

$$dA = \frac{1}{2} R^2 \, d\theta \quad (\text{VI.93})$$

O cálculo da área é também muito simples,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} R^2 \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \pi R^2 \end{aligned}$$

Fica como um exercício calcular a área do círculo usando integrais duplas e coordenadas cartesianas retangulares.

(v) Vamos completar esta seção usando integrais para resolver outro conhecido problema, o perímetro do círculo. Faremos, também, comparações entre o uso de coordenadas cartesianas e polares.

Vamos usar primeiro coordenadas cartesianas. Para tal, tomamos um elemento infinitesimal, ds , sobre o círculo (veja a Figura VI.16). Vemos que ele é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são dx e dy . Assim, podemos escrever (você já deve ter se deparado com esta expressão na resolução do exercício V.7)

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \quad (\text{VI.94})$$

Convenientemente, a reescrevemos como

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx \quad (\text{VI.95})$$

Devido à simetria do problema, temos que o perímetro p do círculo pode ser dado por

$$p = 4 \int_0^R \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx \quad (\text{VI.96})$$

Como $\frac{dy}{dx}$ é a derivada de y com respeito a x em pontos do círculo, temos, derivando diretamente a equação do círculo.

$$\begin{aligned} 2x + 2y \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \end{aligned} \quad (\text{VI.97})$$

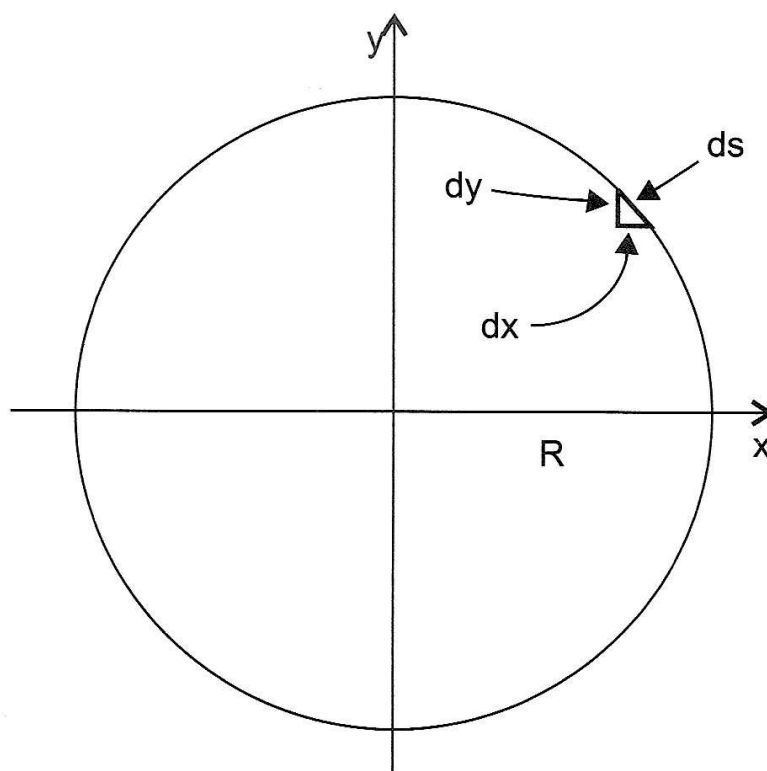


Figura VI.16: Elemento infinitesimal em coordenadas cartesianas

Substituindo este resultado em (VI.96), vem

$$\begin{aligned} p &= 4 \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} dx \\ &= 4 \int_0^R \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y^2}} dx \\ &= 4R \int_0^R \frac{dx}{y} \\ &= 4R \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \end{aligned} \quad (\text{VI.98})$$

A resolução da integral acima é familiar. Como de praxe, evitamos o problema da raiz quadrada com uma substituição do tipo $x = R \sin \phi$ (estou usando uma outra variável para não dizer que ela tem de ser necessariamente a variável θ

das coordenadas polares). Com isto, $\sqrt{R^2 - x^2} = R \cos \phi$ e $dx = R \cos \phi d\phi$. Fazendo essas substituições no elemento diferencial da integral, vemos que ele fica proporcional a $d\phi$. A integral é portanto ϕ ou $\arcsen \frac{x}{R}$. Assim, substituindo esse resultado em (VI.98), temos

$$\begin{aligned} p &= 4R \arcsen \frac{x}{R} \Big|_0^R \\ &= 4R \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) \\ &= 2\pi R \end{aligned} \tag{VI.99}$$

que é a conhecida expressão do perímetro do círculo.

Usando agora coordenadas polares, temos que o elemento infinitesimal ds é dado por (veja Figura VI.17)

$$ds = R d\theta \tag{VI.100}$$

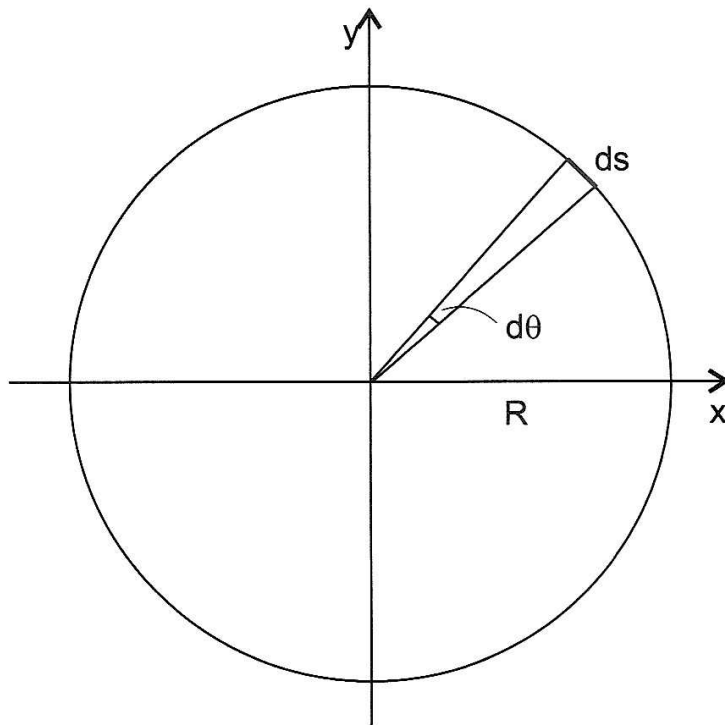


Figura V.17: Elemento infinitesimal em coordenadas polares

O perímetro é então diretamente calculado

$$p = R \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi R$$

Fica patente neste exemplo que a escolha de coordenadas apropriadas pode fazer com que o problema fique extremamente simples.

8. Exemplo de integrais trigonométricas em física básica

No exercício 15 do Capítulo V, considerou-se um corpo de massa m , movimentando-se sobre o eixo x sob a ação da força de uma mola de constante elástica k . Foi pedido, naquela oportunidade, para se obter a velocidade do corpo em cada ponto, $v(x)$, com a condição de que tenha partido do repouso, em $t = 0$ e $x = A$. Vamos aqui calcular a posição do corpo em cada instante, $x(t)$.

Primeiramente, relembremos o cálculo de $v(x)$. O que temos de fazer, inicialmente, é identificar o elemento diferencial característico do problema. No caso, ele é obtido usando-se a segunda lei de Newton. Como a resultante das forças que atuam sobre o corpo é só a força da mola, $-kx$ (o problema é numa dimensão, não há necessidade de se usar a notação vetorial – o sentido da força é dado pelo sinal da variável x), temos

$$-kx = m \frac{dv}{dt} \quad (\text{VI.101})$$

No elemento diferencial acima há três variáveis envolvidas. Portanto, do jeito em que está, não há como se escrever um elemento diferencial do tipo $f(u) du$. Já nos deparamos com uma situação bem semelhante ao ter que manipular a relação (V.18), no exemplo discutido na Seção 3 do capítulo anterior. Aqui, o procedimento é o mesmo. Usando a regra da cadeia, escrevemos $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$. Levando este resultado em (VI.101), podemos escrever o elemento diferencial

$$v dv = -\frac{k}{m} x dx \quad (\text{VI.102})$$

No qual, como vemos, os dois lados da expressão são do tipo $f(u) du$. Assim, podemos proceder à integração. O resultado é

$$v = \sqrt{\frac{k}{m} (A^2 - x^2)} \quad (\text{VI.103})$$

Vemos que o movimento da partícula sob a ação da força da mola é limitado a $-A \leq x \leq A$.

Vamos calcular agora a posição da partícula em cada instante. Substituindo v por dx/dt na expressão acima, identificamos o elemento diferencial e não há problema algum em prepará-lo para a integração. É fácil ver que a forma do elemento diferencial a ser integrado é

$$\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}} dt \quad (\text{VI.104})$$

Escrevendo as integrais e colocando os limites de integração correspondentes temos

$$\int_A^x \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \int_0^t dt \quad (\text{VI.105})$$

Observamos que a integral do lado esquerdo é do tipo que pode ser resolvida por uma substituição trigonométrica. A esta altura, a sua solução já nos é bem familiar. Vamos resolvê-la, não custa nada. Estamos sempre substituindo a variável por uma função seno. Usemos agora cosseno. Fazendo, então, $x = A \cos \theta$, temos $\sqrt{A^2 - x^2} = A \sin \theta$ e $dx = -A \sin \theta d\theta$. Levando esses resultados na integral que aparece do lado esquerdo de (VI.105), temos

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} &= - \int d\theta \\ &= -\theta + C \\ &= -\arccos \frac{x}{A} + C \end{aligned}$$

Substituindo este resultado em (VI.105), vem

$$\begin{aligned} -\arccos \frac{x}{A} \Big|_A^x &= \sqrt{\frac{k}{m}} t \Big|_0^t \\ \Rightarrow -\arccos \frac{x}{A} &= \sqrt{\frac{k}{m}} t \\ \Rightarrow x &= A \cos \left(-\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \\ \Rightarrow x &= A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \end{aligned} \tag{VI.106}$$

Sendo que, na última passagem, usou-se a relação trigonométrica (VI.22).

Este é o conhecido resultado do movimento harmônico simples. O importante a ser destacado é que chegamos a ele sem recorrer a nenhuma hipótese adicional. Só usamos a Física e a Matemática. No Apêndice C, a título de ilustração, veremos como este problema pode ser resolvido através da solução de equação diferencial (e não por integrais).

9. Exemplo de integrais trigonométricas num problema de probabilidades

Qual a probabilidade de uma agulha de comprimento l , jogada aleatoriamente sobre uma superfície horizontal, contendo linhas paralelas igualmente espaçadas de t , ficar sobre uma das linhas? (veja Figura VI.18).

Este problema, proposto no século XVIII pelo Comandante Buffon, Sir Georges-Louis Leclerc, ficou conhecido como “Agulha de Buffon”. O interesse despertado por ele, como veremos, é que corresponde a uma experiência estatística para obtenção do número (irracional) π .

Antes de começar a tratar do problema diretamente, vamos falar um pouco sobre probabilidades. Sem dúvida, todos já viram um juiz, antes do início de

uma competição desportiva, usar uma moeda para decidir quem vai sair primeiro, de que lado vai ficar cada time etc. Pois bem, este simples procedimento é um exemplo de probabilidade. Há 50% de chance para dar “cara” ou “coroa”. Podemos dizer, também, que a probabilidade de dar um caso ou outro é $1/2$. Não é difícil perceber que no caso de dados, a probabilidade de dar uma determinada face para cima é de $1/6$.

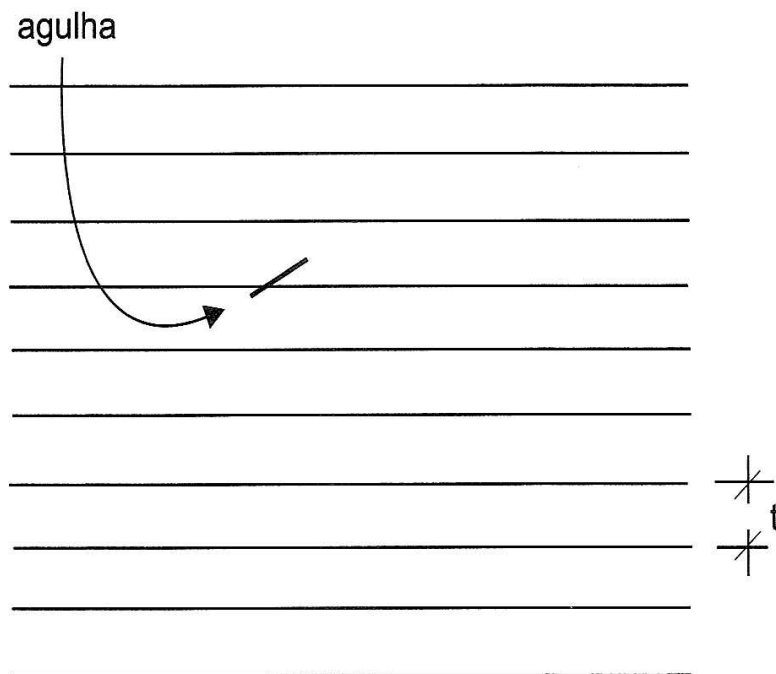


Figura VI.18: Exemplo de quando a agulha cai sobre a linha

Não precisaremos mais do que esses dois objetos (uma moeda e um dado) para entender o fundamento de probabilidade que será apresentado. Supondo, agora, que você jogue o dado e a moeda, qual a probabilidade de dar, por exemplo, “cara” na moeda e o número três no dado? Há doze possibilidades (a cada face do dado pode estar associada o lado “cara” ou “coroa” da moeda). Portanto, a probabilidade é de $1/12$.

Assim, a probabilidade conjunta desses dois objetos (que são distintos) é o produto das duas probabilidades individuais, ou seja

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \quad (\text{VI.107})$$

Realmente, é só isso de que precisaremos para entender a solução do problema proposto. Entretanto, não custa nada falar mais um pouco sobre o caso de quando os dois objetos são idênticos, por exemplo, duas moedas ou dois dados iguais. Vamos ficar com as duas moedas. Se você jogar as duas moedas (ou jogar uma moeda duas vezes – dá no mesmo), você tem quatro possibilidades de resultado, como mostra a Figura VI.19.

Vemos que pode dar “cara-cara”, “cara-coroa”, “coroa-cara” e “coroa-coroa”. No caso de dar “cara” numa moeda e “coroa” na outra, há duas possibilidades entre as quatro. Assim, a probabilidade para este caso é de $1/2$. Para

“cara-cara” (ou “coroa-coroa”), só há uma possibilidade entre as quatro e a probabilidade é, portanto, $1/4$.

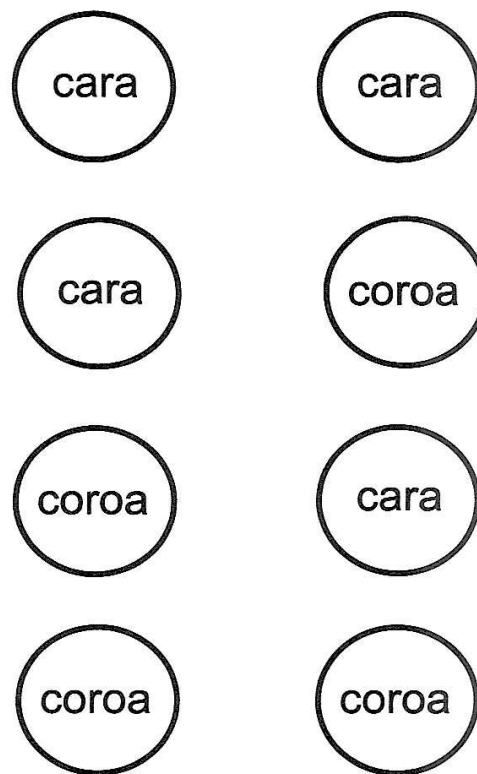


Figura VI.19: Exemplo com duas moedas iguais

Isto não quer dizer que se você jogar uma moeda para cima uma vez e der “cara”, na outra vez tem de dar “coroa”, ou é mais provável que dê “coroa”. Significa sim que, dentro do conjunto de jogadas das duas moedas, existe uma probabilidade de $1/4$ de dar “cara” duas vezes. Será que é difícil jogar uma moeda para cima 30 vezes e dar 30 “caras”? Tente você mesmo para experimentar. Caso você consiga em poucas tentativas, posso afirmar que você é uma pessoa de muita sorte. Dar seguidamente 30 “caras” (ou 30 “coroas”) é vinte vezes mais difícil que ganhar sozinho na mega sena, com uma só aposta!

Vamos voltar ao nosso problema. Consideremos $t > l$ (isto não muda muito na característica do problema). Seja x a distância do centro da agulha à linha mais próxima e θ o ângulo entre a linha e a agulha (veja Figura VI.20)

Portanto, em relação à linha mais próxima, x pode estar entre 0 e $t/2$ e o ângulo θ pode estar entre 0 e π . Estes são os valores possíveis de x e θ , assim como dois eram os valores possíveis das faces de uma moeda e seis eram os valores possíveis das faces de um dado. A única diferença entre os dois casos é que as variáveis x e θ são contínuas e lá eram discretas. Raciocinaremos, então, com os elementos diferenciais dx e $d\theta$, que, como sabemos, representam valores entre x e $x + dx$, e θ e $\theta + d\theta$. Portanto, a probabilidade de a variável x estar entre x e $x + dx$ é $\frac{dx}{t/2} = \frac{2dx}{t}$ e a correspondente probabilidade para a variável θ é $\frac{d\theta}{\pi}$.

Assim como a moeda e o dado, as variáveis x e θ são independentes. A probabilidade conjunta para os dois eventos, que chamaremos de dP é

$$\begin{aligned}
dP &= \frac{2 dx}{t} \frac{d\theta}{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi t} dx d\theta
\end{aligned}
\tag{VI.108}$$

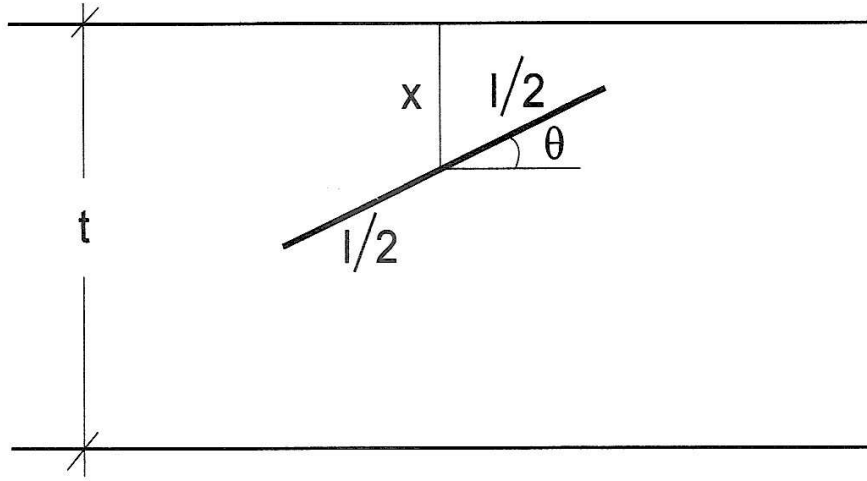


Figura VI.20: Localização da agulha em relação às linhas

Identificamos o elemento diferencial do problema e ele está pronto para ser integrado (será uma integração dupla bem simples).

O nosso objetivo é saber sobre a probabilidade de a agulha cruzar a linha. Vemos que isto ocorrerá se $x \leq \frac{l}{2} \sin \theta$. Assim, as integrações que deveremos fazer para achar a probabilidade de a agulha cruzar a linha são

$$\begin{aligned}
P &= \int_0^\pi \int_0^{(l/2) \sin \theta} \frac{2}{\pi t} dx d\theta \\
&= \frac{2}{\pi t} \int_0^\pi \frac{l}{2} \sin \theta d\theta \\
&= -\frac{l}{\pi t} \cos \theta \Big|_0^\pi \\
&= \frac{2l}{\pi t}
\end{aligned}
\tag{VI.109}$$

Começamos com a integração em x porque seus limites dependiam de θ .

Experimentalmente, joga-se uma agulha N vezes sobre a superfície (quanto maior N , melhor a questão da estatística). Se desses N eventos, n deles cruzarem uma das linhas, teremos que probabilidade é n/N . Substituindo este resultado em (VI.109), temos

$$\frac{n}{N} = \frac{2l}{\pi t}
\tag{VI.110}$$

Usualmente considera-se $t = l$. Assim, pode-se escrever um interessante valor estatístico para π

$$\pi = \frac{2N}{n} \quad (\text{VI.111})$$

Este resultado é que levou ao grande interesse pelo problema. Temos uma maneira de relacionar o número irracional π com um problema de estatística. Várias e várias experiências foram feitas comprovando o resultado deste interessante problema. Atualmente, é um exemplo corriqueiro nos projetos de iniciação científica. Você mesmo pode planejar um mecanismo para realizá-lo. Entretanto, há programas que simulam essa experiência no computador. Muitos deles (um número muito grande) estão *on line*. Caso você esteja interessado, basta acessar o *Google* e procurar por **Buffon agulha** ou **Buffon needle**.

Exercícios

1. Deduzir as relações (VI.13) e (VI.14).
2. Deduzir as relações (VI.28), (VI.29) e (VI.30).
3. Deduzir as relações (VI.51) - (VI.55).
4. Deduzir as relações (VI.45), (VI.46), (VI.47) e (VI.48).
5. Calcular a derivada das seguintes funções em relação à variável correspondente

- (a) $y = \text{sen } ax^2$
- (b) $x = \text{sen } \sqrt{1 + \theta}$
- (c) $s = \cos \sqrt{1 + at^2}$
- (d) $y = \text{sen}^3 x^2$
- (e) $u = \cos^2 v$
- (f) $y = 2 \text{sen } x \cos x$
- (g) $y = \text{sen } 2x \cos x$
- (h) $\rho = \frac{\text{sen } \theta}{\theta}$
- (i) $x = \text{tg}^3 \theta$
- (j) $x = \frac{1}{3} \text{tg}^3 \theta - \text{tg } \theta + \theta$
- (k) $y = x \text{sen } \frac{x}{2}$
- (l) $\theta = \text{arc tg } 3x$
- (m) $\theta = \text{arc tg } \sqrt{x}$
- (n) $\theta = x \text{ arc sen } x$
- (o) $\theta = x^2 \text{ arc tg } 2x$

- (p) $\theta = \arcsen(\cos x - x^2)$
- (q) $\theta = \arcsen x + \arccos x$
- (r) $\theta = x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsen \frac{x}{a}$
- (s) $y = \sqrt{2 + \cos 2x}$
- (t) $y^2 = \sen^4 2x + \cos^4 2x$

6. Calcular dy/dx das seguintes funções

- (a) $x = \sen y$
- (b) $x = \sen y^2$
- (c) $x = \sen^3 y^2$
- (d) $x = \arcsen y$
- (e) $x = \arctg y$
- (f) $x = \arcsen(\cos x - x^2)$
- (g) $\sen^3 y + \cos^3 y = x^3$
- (h*) $x \sen 2y = y \cos 2x$
- (i) $y = \cos(x - y)$

7. Calcular a derivada segunda de cada uma das funções em relação à variável correspondente.

- (a) $y = \sen kx$
- (b) $u = \tg v$
- (c) $y = \frac{\sen x}{x}$
- (d) $y = x \cos x$

8. Ache os ângulos de interseção de cada um dos pares de curva

- (a) $y = \sen x$ e $y = \cos x$
- (b) $y = \tg x$ e $y = \cotg x$
- (c) $y = \cos x$ e $y = \sen 2x$

9. Ache o máximo, mínimo e pontos de inflexão nos intervalos indicados

- (a) $y = \frac{1}{2}x - \sen x$ (0 a 2π)
- (b) $y = 2x - \tg x$ (0 a π)
- (c) $y = \tg x - 4x$ (0 a π)
- (d) $y = 3 \sen x - 4 \cos x$ (0 a 2π)
- (e) $y = \sen \pi x - \cos \pi x$ (0 a 2)

10. Calcule o ponto máximo de

$$y = a \operatorname{sen} x + b \cos x$$

11. Calcule as seguintes integrais (use o método que julgar mais apropriado)

$$(a) \quad \int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx$$

$$(b) \quad \int_0^{\pi} \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx$$

$$(c) \quad \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen}(2x^2) \, dx$$

$$(d) \quad \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^5 x \cos x \, dx$$

$$(e) \quad \int \operatorname{arc} \operatorname{sen} x \, dx$$

$$(f) \quad \int x \operatorname{sen} x \, dx$$

$$(g) \quad \int x \cos x \, dx$$

$$(h) \quad \int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$$

$$(i) \quad \int x^2 \cos x \, dx$$

$$(j) \quad \int x^3 \cos x^2 \, dx$$

$$(k) \quad \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x \, dx$$

$$(l) \quad \int x^2 \cos x^3 \, dx$$

$$(m) \quad \int \cos^4 x \, dx$$

$$(n) \quad \int \cos^6 x \, dx$$

$$(o) \quad \int \cos^3 x \, dx$$

$$(p) \quad \int \cos^5 x \, dx$$

$$(q) \quad \int \cos^7 x \, dx$$

$$(r) \quad \int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx$$

$$(s) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

- (t) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$
- (u) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}$
- (v) $\int \frac{dx}{1+4x^2}$
- (x) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$
- (w) $\int \operatorname{sen}^4 x \cos x \, dx$
- (y) $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x} \, dx$
- (z) $\int \operatorname{sen} 3x \, dx$
- (aa) $\int \cos 4x \, dx$
- (bb) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x \cos x \, dx$
- (cc) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx$
- (dd) $\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$
- (ee) $\int_0^1 \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{1+x^2} \, dx$
- (ff) $\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x^2 \, dx$
- (gg) $\int x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx$
- (hh) $\int x \operatorname{arc} \cos x \, dx$
- (ii) $\int_{-1}^0 \operatorname{arc} \operatorname{sen} x \, dx$
- (jj) $\int \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}} \, dx$
- (kk) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$
- (ll) $\int \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}} \, dx$
- (mm) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$
- (nn) $\int_0^4 \frac{dx}{(16+x^2)^2}$

$$(oo) \quad \int_0^a x^4 \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

12. Mostre que

$$\int_{+\pi}^{-\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases}$$

13. Calcular a área do círculo, em coordenadas cartesianas, usando integração dupla.

14*. Calcular a área da elipse, cuja equação em coordenadas cartesianas é dada por (veja Figura VI.21)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(O uso da equação da elipse em coordenadas polares, para o cálculo da área, levaria a uma integral cuja solução estaria fora do que aprendemos aqui.)

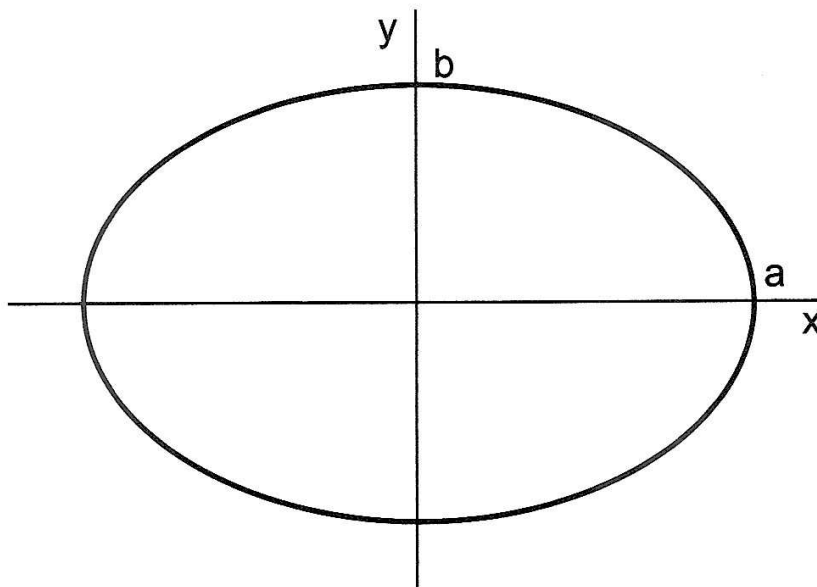


Figura VI.21: Elipse com centro na origem

15. Calcular o comprimento da curva, em que as coordenadas x e y são dadas por $x = \cos^3 t$ e $y = \operatorname{sen}^3 t$, entre $t = 0$ e $t = \pi/4$.

16*. Achar o comprimento do laço da curva $r = a(1 + \cos \theta)$ (dado em coordenadas polares). Calcular também a área da figura.

17. Calcular o comprimento de $r = \cos \theta$ entre $-\pi/2$ e $\pi/2$.

18. Ache a área das regiões limitadas pelas seguintes curvas (dadas em coordenadas polares)

(a) $r = 10 \cos \theta$

(b) $r = 1 - \cos \theta$

(c) $r = \sqrt{1 - \cos \theta}$

(d) $r = 2 + \sin 2\theta$

(e) $r = 1 - \sin \theta$

Capítulo VII

Funções exponenciais e logarítmicas

1. Introdução

No Capítulo II, introduzimos o conceito de funções de potência, que são funções do tipo

$$y = x^n \tag{VII.1}$$

no qual o expoente n é um número inteiro ou fracionário.

As funções exponenciais, como também dissemos naquela oportunidade, são uma generalização das funções de potência no qual o expoente, agora, pode ser qualquer número real. Assim, dizemos que

$$y = a^x \tag{VII.2}$$

é uma função exponencial na base a (também não há restrições quanto aos valores de a).

Como exemplos de funções exponenciais, temos

$$\begin{aligned} y &= 2^x \\ y &= 2^{\sqrt{x}} \\ y &= 5^{\sin x} \\ y &= \pi^x \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

O logaritmo nada mais é do que uma outra maneira de se reescrever uma função exponencial (ou uma função de potência num caso particular) em que o expoente é explicitado. Seja, por exemplo, a própria relação (VII.2). Dizemos que o expoente x é o logaritmo de y na base a . Matematicamente, isto é escrito da seguinte forma

$$x = \log_a y \tag{VII.3}$$

Exemplos

$$3 = \log_2 8$$

$$2 = \log_3 9$$

$$\frac{1}{2} = \log_4 2$$

$$0,30103 = \log_{10} 2$$

$$0,47712 = \log_{10} 3$$

Por convenção, não se escreve o valor da base quando ela for 10. Assim, nos dois últimos exemplos acima, é mais comum a notação

$$\log 2 = 0,30103 \dots$$

$$\log 3 = 0,47712 \dots$$

A base 10 é uma base usual para se tratar logaritmos. Uma outra base usual é o número irracional $e = 2,718 \dots$. Falaremos daqui a pouco sobre o porquê de se usar este número irracional como base.

Vamos concluir esta seção relembrando alguns valores particulares de logaritmo bem como suas propriedades (que são facilmente verificadas através da sua relação de definição VII.3).

$$(i) \quad \log_a 1 = 0$$

$$(ii) \quad \log_a a = 1$$

$$(iii) \quad \log_a 0 = -\infty$$

$$(iv) \quad \log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$$

$$(v) \quad \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$(vi) \quad \log_a N^h = h \log_a N \quad (\text{VII.4})$$

2. Derivada das funções exponencial e logarítmica

Vamos começar com a função logarítmica. Pela definição de derivada temos

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} \quad (\text{VII.5})$$

Usando as propriedades (v) e (vi) dos logaritmos, dadas em (VII.4), e fazendo pequenas manipulações algébricas, vem

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \log_a x &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right) \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \\
&= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \\
&= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{x/\Delta x}
\end{aligned} \tag{VII.6}$$

O problema que temos está em determinar um limite do tipo

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{h} \right)^h = 1^\infty \tag{VII.7}$$

que não está visível devido ao símbolo de indeterminação 1^∞ . Para obter esse limite, usamos a expansão binomial (II.27), que tínhamos adiantado ser válida para qualquer valor do expoente (o que é confirmado no Apêndice D). Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{h} \right)^h &= \lim_{h \rightarrow \infty} \left[1 + h \frac{1}{h} + \frac{h(h-1)}{2!} \frac{1}{h^2} + \dots \right] \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots
\end{aligned} \tag{VII.8}$$

Mostra-se que esta série é convergente. O resultado é um número irracional que é chamado de e . Os seus quatro primeiros algarismos significativos são (o que pode ser facilmente verificado somando-se alguns termos de VII.8)

$$e = 2,718 \tag{VII.9}$$

Substituindo o limite (VII.8) em (VII.6), temos

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e \tag{VII.10}$$

Agora entendemos porque é comum considerar um sistema de logaritmos no qual a base é o próprio número e (que é representado por $\ln$). A derivada da função $\ln x$ é simplesmente dada por

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \tag{VII.11}$$

Fica como um exercício mostrar que

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{a^x}{\log_a e} \tag{VII.12}$$

e, consequentemente,

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \quad (\text{VII.13})$$

Poderíamos, também, ter iniciado com a dedução de (VII.12) e, depois, obter (VII.10), como caso particular. Faça isso também como exercício.

3. Integrais envolvendo funções exponenciais e logarítmicas

O que estamos vendo aqui, completa a relação (V.26)

$$\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C$$

Isto é, naquela oportunidade, chamamos a atenção de que $m \neq -1$. Agora, pela relação (VII.11), temos o caso em que $m = -1$

$$\int \frac{du}{u} = \ln u + C \quad (\text{VII.14})$$

Pela relação (VII.13), também temos que

$$\int e^u du = e^u + C \quad (\text{VII.15})$$

outras integrações serão vistas diretamente nos exercícios.

4. Um exemplo de Física Básica

Um corpo caindo verticalmente sob a ação apenas da força gravitacional é um conhecido problema dos cursos de segundo grau. Geralmente, toma-se como regra a substituição de a por g nas também conhecidas relações da cinemática com aceleração constante. Isto é feito sem passar pela Segunda Lei de Newton e pela Lei da Gravitação (também devida a Newton). Este procedimento é uma deturpação dos fundamentos da Mecânica. Ele pode levar o estudante a muitas dúvidas quando do tratamento de problemas um pouco mais complexos, nos quais não seja possível a aplicação dessa “regra”.

Vamos considerar um desses problemas nesta seção, e, para não termos dúvidas, solicito que o estudante esqueça tudo que viu sobre a “regra” acima.

Seja, então, um corpo caindo verticalmente sob a ação da força gravitacional, mas consideraremos, também, a força de atrito viscoso (causada pelo choque do corpo com as moléculas de ar). A expressão desta força, para velocidades não muito altas, é dada por $-b\vec{v}$ (o sinal menos indica que ela possui sentido contrário à velocidade $\vec{v}$). b é um parâmetro constante que é característico da

forma do corpo (por exemplo, uma folha de papel aberta possui um b maior do que a mesma folha amassada) e da densidade do meio (para um mesmo corpo, na água o b é maior do que no ar). A Figura VII.1 mostra a posição do corpo num ponto qualquer da trajetória vertical, com as duas forças atuando sobre ele (a gravitacional e a de atrito viscoso).

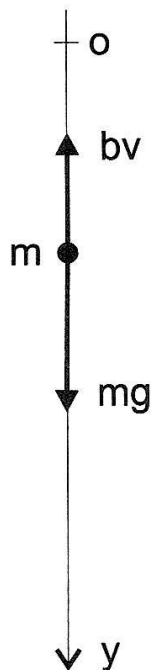


Figura VII.1: Corpo caindo verticalmente com atrito viscoso

A força resultante que atua sobre o corpo é dada por

$$\vec{F} = m\vec{g} - b\vec{v} \quad (\text{VII.16})$$

Como o movimento se processa numa única dimensão, não há necessidade da notação vetorial de forma explícita, pois a linha reta é a direção do movimento e os sinais mais ou menos caracterizam o seu sentido (de acordo com a orientação convencionada para o eixo). Assim, em lugar de (VII.16), podemos simplesmente escrever

$$F = mg - bv \quad (\text{VII.17})$$

De acordo com o que estabelece a Segunda Lei de Newton, temos que a resultante é igual a $m\vec{a}$. Assim, fazendo esta substituição em (VII.17), em que não estamos considerando explicitamente a notação vetorial, temos

$$mg - bv = ma \quad (\text{VII.18})$$

Usando a definição de aceleração, $a = dv/dt$, na expressão acima, vem

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv \quad (\text{VII.19})$$

em que obtemos o seguinte elemento diferencial, já preparado para integração,

$$\frac{m dv}{mg - bv} = dt \quad (\text{VII.20})$$

Para integrar, consideremos que o movimento obedeça às seguintes condições de contorno: $t = 0$, $y = 0$ e $v = 0$ (o corpo parte da origem e em repouso). Assim,

$$\begin{aligned} -\frac{m}{b} \int_0^v \frac{-b dv}{mg - bv} &= \int_0^t dt \\ \Rightarrow \ln \frac{mg - bv}{mg} &= -\frac{bt}{m} \\ \Rightarrow 1 - \frac{bv}{mg} &= e^{-\frac{bt}{m}} \\ \Rightarrow v &= \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right) \end{aligned} \quad (\text{VII.21})$$

Notamos que para $t \rightarrow \infty$, $v = mg/b$ (constante), significando que a força de atrito vai aumentando com a velocidade até atingir um valor máximo, que é igual ao peso (isto ocorre, teoricamente, num tempo infinito). A partir daí o corpo possui resultante nula e sua velocidade passa a ser, conseqüentemente, constante (este é o mesmo caso, por exemplo, dos paraquedistas).

É claro que o resultado dado por (VII.21) deve coincidir com o caso particular conhecido $v = gt$, se fizermos $b = 0$. Verifiquemos este ponto. Substituindo $b = 0$ em (VII.21), obteremos o símbolo de indeterminação $\frac{0}{0}$. Para visualizar o resultado escondido por este símbolo, podemos usar a relação de expansão para e^x . Para ver como essa expansão pode ser feita, consulte o Apêndice D. Aqui, citarei apenas o resultado

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (\text{VII.22})$$

(note que essa expansão é consistente com a expressão da derivada de e^x).

Fazendo uso dessa expansão em (VII.21), temos

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{mg}{b} \left(1 - 1 + \frac{bt}{m} - \frac{1}{2} \frac{b^2 t^2}{m^2} + \frac{1}{6} \frac{b^3 t^3}{m^3} - \dots\right) \\ &= gt \left(1 - \frac{bt}{2m} + \frac{b^2 t^2}{6m^2} - \dots\right) \end{aligned} \quad (\text{VII.23})$$

Tomando agora $b = 0$ na relação acima, obtemos o resultado esperado, isto é, $v = gt$.

Escrevendo $v = dy/dt$ em (VII.21), podemos extrair o seguinte elemento diferencial (também já preparado para integração)

$$dy = \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right) dt \quad (\text{VII.24})$$

Fica como exercício fazer a integração (com as condições de contorno acima) e obter

$$y = \frac{mg}{b} \left(t + \frac{m}{b} e^{-\frac{bt}{m}} - \frac{m}{b}\right) \quad (\text{VII.25})$$

Verifique, também, que fazendo as aproximações $t \rightarrow \infty$ e $b = 0$, são obtidos resultados conhecidos. Resolva também o exercício 11, que consiste num caminho um pouco diferente do que vimos aqui.

5. Função gama ou função fatorial

A chamada função gama ou função fatorial é uma extensão do conceito usual de fatorial para qualquer número do campo real (e também para variáveis complexas). A sua definição envolve funções exponenciais e é dada por meio de uma integração

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt \quad (\text{VII.26})$$

Só a título de esclarecimento, observe que a variável de integração t desaparece após a integral ser feita e os limites de integração serem substituídos. Poderíamos ter usado qualquer outra letra para desempenhar o papel da variável de integração. O importante a ser observado é que o resultado da integração é uma quantidade dependente de p (que se chama função gama).

Vamos ver agora o porquê do nome função fatorial. Tomemos o integrando de (VII.26) e o modifiquemos convenientemente (nada mais vamos fazer do que usar o conhecido processo de integração por partes)

$$\begin{aligned} t^{p-1} e^{-t} dt &= -t^{p-1} d(e^{-t}) \\ &= -d(t^{p-1} e^{-t}) + e^{-t} d(t^{p-1}) \\ &= -d(t^{p-1} e^{-t}) + (p-1) t^{p-2} e^{-t} dt \end{aligned} \quad (\text{VII.27})$$

Substituindo este resultado na expressão inicial (VII.26), temos

$$\Gamma(p) = -t^{p-1} e^{-t} \Big|_0^{\infty} + (p-1) \int_0^{\infty} t^{p-2} e^{-t} dt \quad (\text{VII.28})$$

O primeiro termo é nulo. No segundo, vemos que $\int_0^{\infty} t^{p-2} e^{-t} dt$ é $\Gamma(p-1)$. Assim, podemos reescrever (VII.28) simplesmente como

$$\Gamma(p) = (p-1) \Gamma(p-1) \quad (\text{VII.29})$$

Desenvolvendo de forma semelhante o termo $\Gamma(p-1)$, teríamos

$$\Gamma(p) = (p-1)(p-2)\Gamma(p-2) \quad (\text{VII.30})$$

E, assim, sucessivamente. Essa característica da função gama lembra o que vimos sobre fatorial de $(p-1)$. Vejamos se para valores inteiros de p ela realmente coincide com $(p-1)!$. Seja, inicialmente, $p=1$. Usando diretamente a relação de definição da função gama, dada por (VII.26), temos

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} dt \\ &= -e^{-t} \Big|_0^{\infty} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (\text{VII.31})$$

Este resultado não só mostra que $\Gamma(1) = 0!$ mas, também, que $0!$ é igual a 1 (não é por simples convenção pois este resultado está embutido na definição da função gama). Vemos, então, que a função $\Gamma(p)$ coincide com a definição de $(p-1)!$ para p inteiro (e positivo). De fato, combinando (VII.29), (VII.30) e (VII.31), temos

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1 = 1! \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2 = 2! \\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3 \times 2! = 3! \quad \text{etc.} \end{aligned} \quad (\text{VII.32})$$

Como falamos no início, a função gama permite que se generalize o conceito de fatorial para qualquer número. Por exemplo, para números inteiros negativos, a função gama é divergente. Isto também pode ser visto diretamente. Seja a relação (VII.29), no qual faremos $p=1$. Assim,

$$\Gamma(1) = 0\Gamma(0) \quad (\text{VII.33})$$

Vimos acima que $\Gamma(1) = 0! = 1$. Portanto, pela relação (VII.33), isto só faz sentido se $\Gamma(0)$ (que é igual a $-1!$) for infinito. Pelo mesmo motivo temos que $\Gamma(-1) = -2!$, $\Gamma(-2) = -3!$ etc. são divergentes também. Isto pode ser visto partindo-se da própria relação (VII.33)

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 0(-1)\Gamma(-1) \\ &= 0(-1)(-2)\Gamma(-2) \quad \text{etc.} \end{aligned} \quad (\text{VII.34})$$

Para outros valores de p , o processo de obtenção de $\Gamma(p)$ pode não ser tão direto, pois fica na dependência de solução da integral que define a função gama. Mencionemos que nem sempre existe uma função cuja derivada dá $t^{p-1}e^{-t}$. Na verdade, isso só existe mesmo para casos muito particulares, como $p=1$ [veja

o cálculo de $\Gamma(1)$]. Geralmente, a obtenção de $\Gamma(p)$ para p não inteiro (positivo ou negativo) requer o uso de cálculo numérico (a integral é obtida de forma aproximada). Antigamente, isto era feito por laboriosos processos. Atualmente, com a facilidade de programas computacionais, é algo facilmente conseguido.

Um ponto interessante é que para alguns valores de p , mesmo sem existir a função cuja derivada dá $t^{p-1}e^{-t}$, é possível o cálculo da integral que define a função gama (isto se deve à particularidade de os limites de integração serem 0 e ∞). Este é o caso, por exemplo, de $p = \frac{1}{2}$. Substituindo este valor em (VII.26) temos

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt \quad (\text{VII.35})$$

Convenientemente, façamos $t = x^2$ na relação acima. Isto nos dá que

$$I = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (\text{VII.36})$$

Não existe nenhuma função cuja derivada dá e^{-x^2} , mas a integral pode ser resolvida. Vejamos como. Podemos reescrever (VII.36) usando qualquer outra variável de integração, por exemplo y . Assim,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \quad (\text{VII.37})$$

Multiplicando (VII.36) e (VII.37), temos

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \end{aligned} \quad (\text{VII.38})$$

Temos acima que I^2 é dada por uma integração de superfície por todo o plano xy . Em lugar de fazer essa integração usando coordenadas cartesianas, usemos coordenadas polares (veja a Figura VI.12). A mudança é simples. Em lugar de $x^2 + y^2$ escrevemos r^2 e em lugar do elemento de área $dx dy$ escrevemos $r dr d\theta$ (veja Figura VII.2). Os limites de integração para r e θ (a fim de varrer todo o plano horizontal) são 0 e ∞ , e 0 e 2π , respectivamente. Assim, temos que a integração I^2 é equivalentemente escrita como

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= 2\pi \left(-\frac{1}{2} \right) \int_0^{\infty} e^{-r^2} (-2r dr) \\ &= -\pi e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} \\ &= \pi \end{aligned}$$

Portanto

$$\Gamma(1/2) = -\frac{1}{2}! = \sqrt{\pi} \quad (\text{VII.39})$$

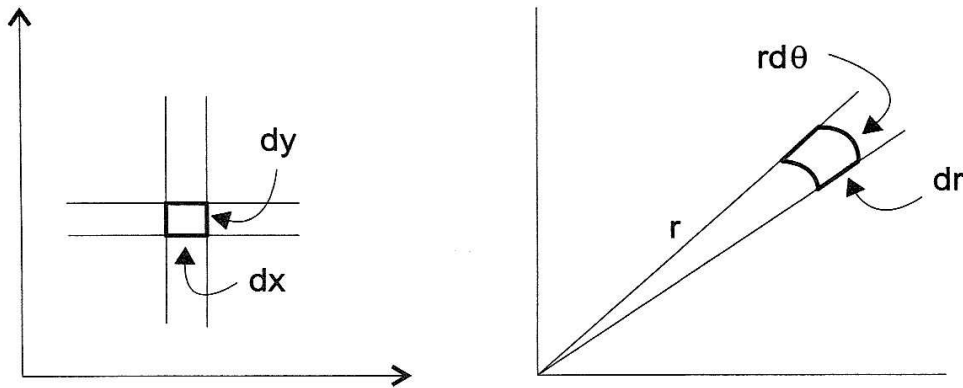


Figura VII.2: Elementos de área em coordenadas cartesianas e polares

A partir desse resultado particular, podemos obter outros (também particulares)

$$\begin{aligned} \Gamma(3/2) &= \frac{1}{2} \Gamma(1/2) = \frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ \Gamma(5/2) &= \frac{3}{2} \Gamma(3/2) = \frac{3}{2}! = \frac{3\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Outros mais,

$$\begin{aligned} \Gamma(1/2) &= -\frac{1}{2} \Gamma(-1/2) \Rightarrow \Gamma(-1/2) = -2 \Gamma(1/2) = -2\sqrt{\pi} \\ \Gamma(-1/2) &= -\frac{3}{2} \Gamma(-3/2) \Rightarrow \Gamma(-3/2) = -\frac{2}{3} \Gamma(-1/2) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Exercícios

1. Resolva as equações

$$(a) \quad e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$$

$$(b^*) \quad e^x + 2 - 35e^{-x} = 0$$

2. Deduzir as relações (VII.12) e (VII.13).

3. Usando diretamente a definição de derivada, obtenha (VII.12). Depois obtenha (VII.10) como caso particular.

4. Calcular a derivada das seguintes funções

(a) $y = e^{\sin 3x}$

(b) $y = \sin(e^{x^2})$

(c) $y = \log(e^x + \sin x)$

(d) $y = e^{e^x}$

(e) $y = x^{\sqrt{x}}$

(f) $y = \frac{x}{e^x}$

5. Mostrar por indução que

$$\frac{d^n}{dx^n}(xe^x) = (x+n)e^x$$

6. Calcular a equação das tangentes às curvas

(a) $y = e^{3x}$ em $x = 1$

(b) $y = xe^x$ em $x = 2$

(c) $y = x^2e^{-x}$ em $x = 1$

7. Calcule as seguintes integrais (use o método que julgar mais apropriado)

(a) $\int e^x dx$

(b) $\int xe^x dx$

(c) $\int \ln x dx$

(d) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

(e) $\int e^x \sin e^x dx$

(f) $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

(g) $\int e^x \sqrt{e^x + 1} dx$

(h) $\int \frac{1 + e^{2x}}{e^x} dx$

(i) $\int xe^{-\sqrt{x}} dx$

(j) $\int x^3 \log x dx$

$$(k) \quad \int \sqrt{x} \log x \, dx$$

$$(l) \quad \int e^x \sin x \, dx$$

$$(m) \quad \int \ln^2 x \, dx$$

$$(n) \quad \int \ln^3 x \, dx$$

8. A partir do elemento diferencial dado por (VII.24) e usando as condições de contorno $t = 0$, $y = 0$ e $v = 0$, obtenha a relação (VII.25).

9. Vimos para $t \rightarrow \infty$ que a velocidade v dada por (VII.21) tendia para o valor constante $v = mg/b$. Verifique, então, que fazendo $t \rightarrow \infty$ na expressão (VII.25), obtém-se $y = mgt/b$.

10. Usando a expansão para e^x , dada por (VII.22), na expressão (VII.25), verifique que o conhecido resultado do movimento em queda livre $y = \frac{1}{2}gt^2$ é obtido.

11. Fazendo na relação (VII.19) que $\frac{dv}{dt}$ pode ser escrito como (regra da cadeia) $\frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt}$, que é igual a $v \frac{dv}{dy}$, obtenha o elemento diferencial

$$\frac{mv \, dv}{mg - bv} = dy$$

Usando as mesmas condições de contorno acima, faça a integração correspondente e obtenha uma expressão para $v(y)$. Depois, tomando que $v = dy/dt$, obtenha um elemento diferencial envolvendo dy e dt . Verifique se há consistência com o que foi desenvolvido na seção 4.

12. Seja um corpo movendo-se horizontalmente no qual atua sobre ele só a força de atrito viscoso $-b\vec{v}$. Veja a Figura VII.3, onde o corpo está numa certo ponto do seu movimento.

(a) Mostre que a Segunda Lei de Newton leva à expressão $ma = -bv$

(b) Use a definição da aceleração na expressão acima e obtenha um elemento diferencial envolvendo dv e dt . Considerando as condições de contorno $t = 0$, $x = 0$ e $v = V$, Faça a integração correspondente e obtenha a expressão para $v(t)$.

(c) Fazendo $v = dx/dt$ na relação que você obteve no item anterior, escreva uma relação diferencial para dx e dt . Integre esta expressão (considerando as mesmas condições de contorno) e obtenha $x(t)$. Faça $t \rightarrow \infty$ e obtenha a distância percorrida pelo corpo.

(d) Volte agora à expressão da Segunda Lei de Newton dada no item (a) e use a mesma substituição vista no exercício 6. Obtenha uma expressão diferencial envolvendo dv e dx . Integre-a convenientemente e obtenha a distância percorrida.

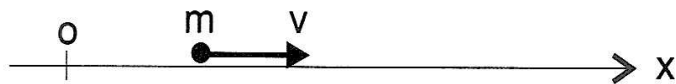


Figura VII.3: Exercício 12.

13. Sejam duas funções $\text{sh } x$ e $\text{ch } x$ (daqui a pouco veremos o porquê dessa notação) definidas por

$$\begin{aligned}\text{sh } x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \text{ch } x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\end{aligned}$$

(a) Mostre que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \text{sh } x &= \text{ch } x \\ \frac{d}{dx} \text{ch } x &= \text{sh } x\end{aligned}\tag{VII.40}$$

e verifique também que

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$$

Devido à similaridade dessas relações (a menos de um sinal) com as relações do seno e cosseno, temos que as notações $\text{sh } x$ e $\text{ch } x$ significam seno e cosseno hiperbólicos de x . O porquê do nome hiperbólico deve-se ao fato de $\text{sh } x$ e $\text{ch } x$ serem componentes da hipérbole unitária $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$, a exemplo de $\text{sen } x$ e $\text{cos } x$ serem componentes do círculo unitário $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$.

Pode-se, também, definir outras funções hiperbólicas similares às correspondentes funções circulares, isto é,

$$\begin{aligned}\text{th } x &= \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} \\ \text{coth } x &= \frac{1}{\text{th } x} \\ \text{sech } x &= \frac{1}{\text{ch } x} \\ \text{cosech } x &= \frac{1}{\text{sh } x}\end{aligned}$$

(b) Usando diretamente as expressões do item (a) mostre que

$$\frac{d}{dx} \operatorname{th} x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{coth} x = -\operatorname{cosech}^2 x \quad \text{etc.}$$

(c*) Essas relações são também úteis na resolução de algumas integrais, em que usamos a relação $1 + \operatorname{sh}^2 \alpha = \operatorname{ch}^2 \alpha$ no lugar de $1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \operatorname{sec}^2 \theta$. Resolva a integral

$$I = \int \sqrt{1 + x^2} \, dx$$

usando substituições por funções hiperbólicas

Apêndice A

Vetores

1. Básico

1a. Adição de vetores

Seja $\vec{R}$ o resultado da adição entre dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, isto é

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} \quad (\text{A.1})$$

O vetor $\vec{R}$ é dito ser a *resultante* entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$. A Fig. A.1 mostra um exemplo de tal soma.

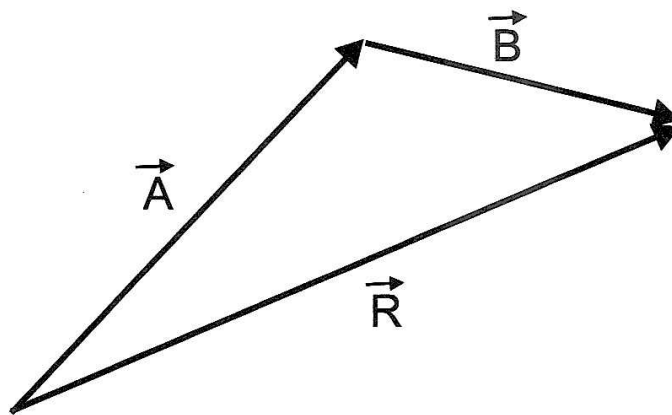


Figura A.1: Adição de vetores

A soma vetorial apresenta as seguintes propriedades:

- Associatividade: $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$
- Comutatividade: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

1b. Multiplicação de um vetor por um escalar

Seja o produto de um vetor $\vec{v}$ por um escalar λ , dando um vetor $\vec{V}$, isto é

$$\vec{V} = \lambda \vec{v} \quad (\text{A.2})$$

O vetor $\vec{V}$ possui a mesma direção do vetor $\vec{v}$. Seu sentido será o mesmo se λ for positivo e será contrário se λ for negativo. O módulo de $\vec{V}$ é λ vezes o módulo de $\vec{v}$. Mostramos alguns exemplos na Fig. A.2.

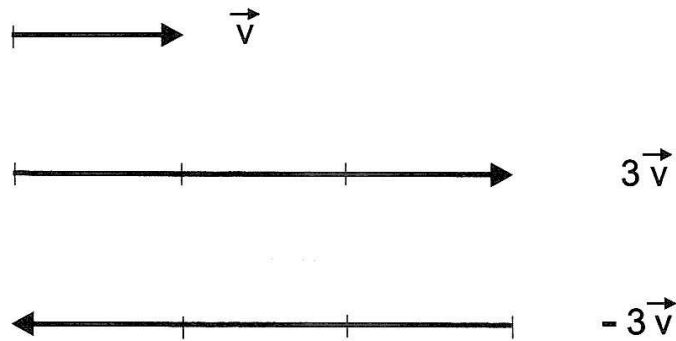


Figura A.2: Multiplicação de um vetor por um escalar

Podemos representar um vetor qualquer através de um *vetor unitário* (vetor de módulo um). Veja a Fig. A.3.

$$\vec{A} = A \hat{u} \quad (\text{A.3})$$

em que A é o módulo do vetor $\vec{A}$, isto é, $A = |\vec{A}|$. $\hat{u}$ é o vetor unitário (denotaremos vetores unitários com um chapéu). Consequentemente, $|\hat{u}| = 1$.



Figura A.3: Vetor unitário

1c. Representação de um vetor através das componentes num sistema de eixos ortogonais

Seja um sistema de eixos ortogonais x , y e z . Consideremos $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ os respectivos unitários. Vamos decompor um vetor $\vec{V}$ ao longo desses eixos, como mostra a Fig. A.4. Pelo que vimos nas subseções acima podemos escrever

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z \\ &= V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

em que

$$\begin{aligned} V_x &= V \sin \theta \cos \phi \\ V_y &= V \sin \theta \sin \phi \\ V_z &= V \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

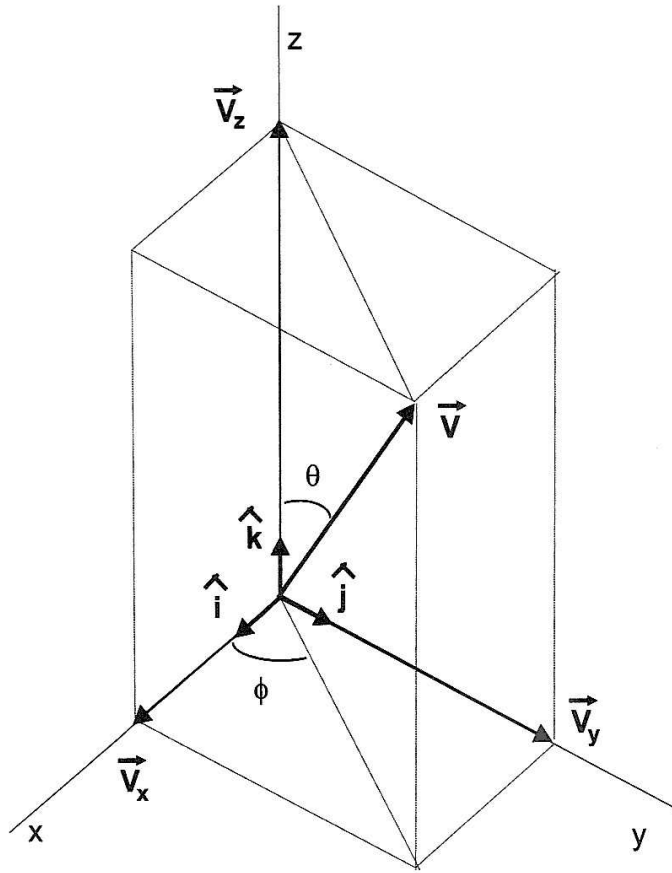


Figura A.4: Vetor decomposto em eixos ortogonais

Como $\vec{V}$ é a diagonal do paralelepípedo formado por $\vec{V}_x$, $\vec{V}_y$ e $\vec{V}_z$, podemos diretamente escrever o módulo de $\vec{V}$ através dos módulos das componentes.

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 \quad (\text{A.6})$$

2. Produtos escalar e vetorial

Sejam $\vec{A}$ e $\vec{B}$ dois vetores, fazendo um ângulo θ entre si, como mostra a Fig. A.5.

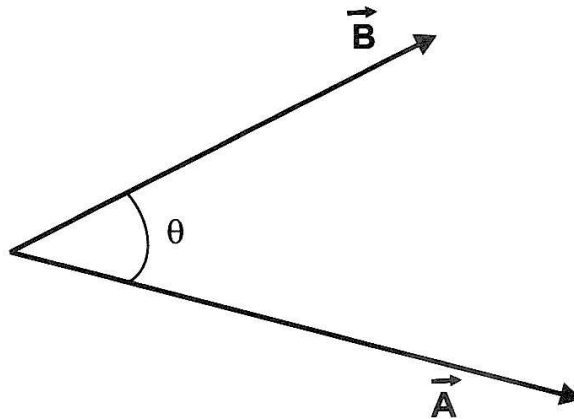


Figura A.5: Vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ formando um ângulo θ .

O *produto escalar* entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, denotado por $\vec{A} \cdot \vec{B}$, é definido por

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta \quad (\text{A.7})$$

O resultado do produto escalar é um escalar e é fácil ver que ele apresenta as seguintes propriedades:

- Comutatividade: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
- Distributividade: $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

O *produto vetorial* entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, denotado por $\vec{A} \times \vec{B}$, é um vetor ¹ cujo módulo é definido por

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta \quad (\text{A.8})$$

e cujo sentido é dado como mostra a Fig A.6. Ele apresenta as seguintes propriedades:

- $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ (não é comutativo)
- $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$ (distributivo)

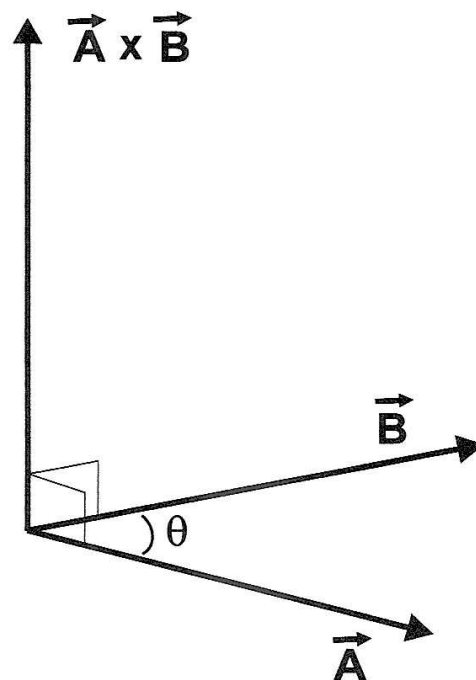


Figura A.6: Produto vetorial

¹Na verdade, é um pseudo-vetor pois $\vec{A} \times \vec{B}$ não muda de sinal quando os eixos coordenados são invertidos.

3. Utilização dos produtos escalar e vetorial

3a. Leis dos senos e cossenos

Seja o triângulo da Figura VI.3, que vamos repeti-lo aqui

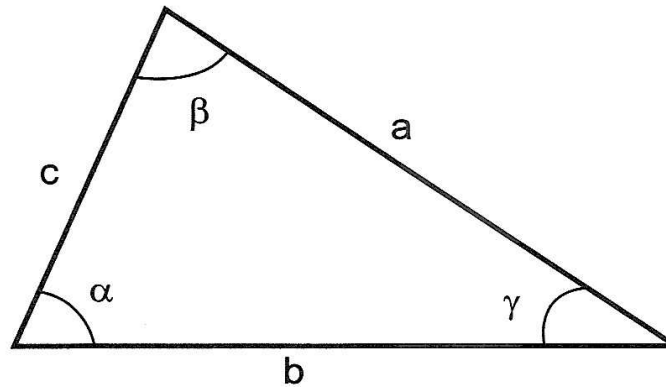


Figura A.7: Exemplo de um triângulo qualquer

Com o uso da notação vetorial, podemos deduzir as relações (VI.13) e (VI.14), chamadas de leis dos senos e cossenos, respectivamente. Para tal, re-escrevamos o triângulo acima colocando vetores em suas arestas (não há regras quanto à orientação dos vetores). Veja Figura A.8. Pela orientação que escolhemos na figura (como disse, poderia ter escolhido uma outra qualquer), temos

$$\vec{b} = \vec{a} + \vec{c} \quad (\text{A.9})$$

Isto que apresentamos acima será a base para todos os desenvolvimentos que faremos.

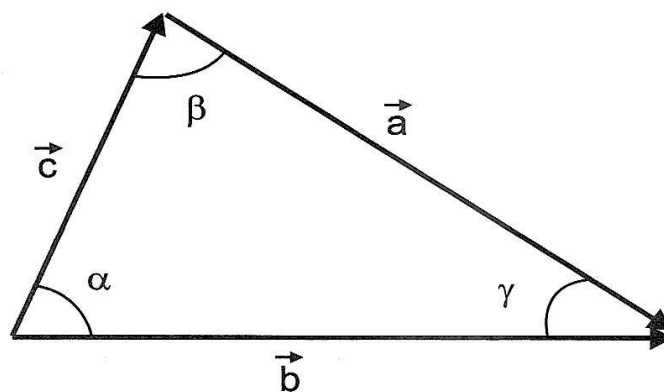


Figura A.8: Sistema de vetores formado com Fig. A.7

Vamos começar deduzindo a lei dos cossenos [na forma como está apresentada na relação (VI.14)]. Assim, tomemos a relação acima isolando o vetor $\vec{a}$

$$\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$$

e multipliquemos escalarmente ambos os lados pelo mesmo vetor $\vec{a}$

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{a} &= (\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{a} \\ \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} &= (\vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c})\end{aligned}$$

Usando a definição de produto escalar e suas propriedades, temos

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \Rightarrow a^2 &= b^2 + c^2 - 2 ab \cos \alpha\end{aligned}\tag{A.10}$$

(i) Pode ser que você esteja em dúvida e pergunte o seguinte. Vamos supor que tivéssemos partido de (A.9) e multiplicado ambos os lados por $\vec{b}$, teríamos obtido a lei dos cossenos corretamente? Vejamos.

$$\begin{aligned}\vec{b} \cdot \vec{b} &= (\vec{a} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{c}) \\ \Rightarrow b^2 &= a^2 + c^2 + 2 \vec{a} \cdot \vec{c} \\ &= a^2 + c^2 + 2 ac \cos (\pi - \beta) \\ &= a^2 + c^2 - 2 ac \cos \beta\end{aligned}$$

Como vemos, o resultado é consistente.

(ii) Vamos supor que você ainda esteja com dúvidas. Poderíamos multiplicar a relação inicial (A.9) por qualquer um dos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ ou $\vec{c}$? A resposta é sim. Você vai obter uma relação para a lei dos cossenos compatível com o lado e o ângulo escolhidos. Como exemplo, multipliquemos ambos os lados de (A.9) por $\vec{c}$.

$$\begin{aligned}\vec{b} \cdot \vec{c} &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{c} \\ \Rightarrow \vec{c} \cdot \vec{c} &= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{c} \\ \Rightarrow c^2 &= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= b^2 + a^2 - 2 \vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= b^2 + a^2 - 2 ab \cos \gamma\end{aligned}$$

(iii) Mesmo assim, você poderia no desenvolvimento acima seguir um outro caminho algébrico. Consideremos novamente a relação $\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$, multiplicada escalarmente por $\vec{c}$, e façamos um desenvolvimento um pouco diferente do que foi feito

$$\begin{aligned}\vec{b} \cdot \vec{c} &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{c} \\ \Rightarrow bc \cos \alpha &= ac \cos (180^\circ - \beta) + c^2 \\ \Rightarrow b \cos \alpha + a \cos \beta &= c\end{aligned}$$

Como vemos, apesar de a lei dos cossenos não ter sido obtida explicitamente, a relação acima é também consistente, pois ela está dizendo que o lado c é igual às projeções dos lados a e b sobre ele.

Estes são exemplos simples de na Matemática pode-se seguir qualquer caminho. Se ele for (matematicamente) correto, o resultado estará correto também (carecendo apenas, quando for o caso, de interpretação).

Para deduzir a lei dos senos, consideramos novamente a relação (A.9), mas a multiplicamos agora vetorialmente, digamos por $\vec{b}$.

$$\begin{aligned}\vec{b} \times \vec{b} &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{b} \\ \Rightarrow 0 &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{b}\end{aligned}$$

Chamando de $\hat{k}$ um vetor unitário perpendicular ao plano do papel e, por hipótese, apontando para cima, temos

$$\begin{aligned}0 &= ab \sin \gamma \hat{k} - cb \sin \alpha \hat{k} \\ \Rightarrow a \sin \gamma &= c \sin \alpha \\ \Rightarrow \frac{a}{\sin \alpha} &= \frac{c}{\sin \gamma}\end{aligned}\tag{A.11}$$

As outras relações que caracterizam a lei dos senos são obtidas multiplicando-se a relação inicial por outros vetores. Verifique isso você mesmo.

3b. Seno e cosseno do arco duplo

Vamos começar deduzindo a relação (VI.15). Seja, então, a Figura A.9, na qual, para facilitar, usamos vetores unitários (o resultado final não seria afetado caso usássemos um outro par de vetores quaisquer).

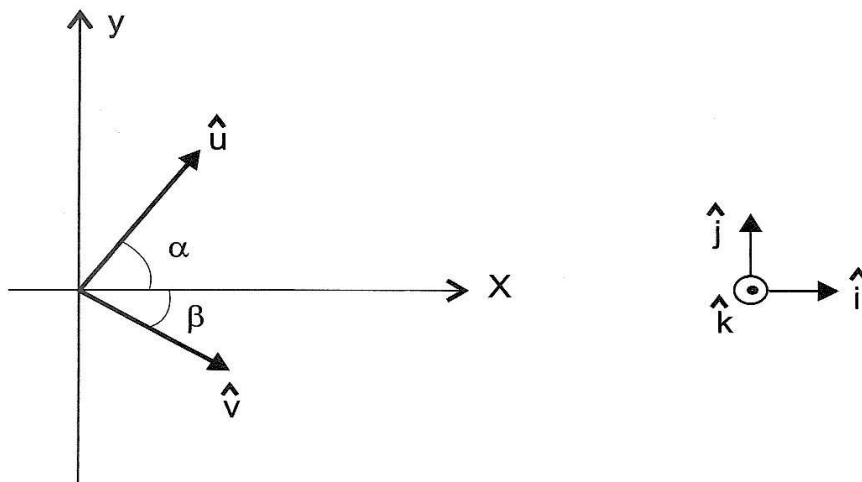


Figura A.9: Sistema com dois vetores unitários

Escrevendo $\hat{u}$ e $\hat{v}$ em termos dos unitários $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$, vem

$$\begin{aligned}\hat{u} &= \cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \hat{j} \\ \hat{v} &= \cos \beta \hat{i} - \sin \beta \hat{j}\end{aligned}\tag{A.12}$$

Multiplicando escalarmente um pelo outro e lembrando que $\hat{u} \cdot \hat{v} = \cos(\alpha + \beta)$, temos

$$\begin{aligned}\hat{u} \cdot \hat{v} &= (\cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \hat{j}) \cdot (\cos \beta \hat{i} - \sin \beta \hat{j}) \\ \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}\tag{A.13}$$

A relação (VI.16) é obtida fazendo-se a multiplicação de $\hat{u}$ e $\hat{v}$ vetorialmente. Verifique isto.

3c. Relação trabalho-energia

A definição do trabalho realizado por uma força (não necessariamente a resultante) é dada através de um produto escalar

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}\tag{A.14}$$

em que dW é o trabalho infinitesimal produzido pela força $\vec{F}$ no deslocamento infinitesimal $d\vec{r}$. Note que o produto escalar na definição de trabalho engloba todas aquelas propriedades do ângulo formado pela força em relação ao deslocamento.

Vamos considerar, agora, que a força $\vec{F}$ acima seja uma força resultante. Assim, pela segunda lei de Newton, podemos substituí-la por $m d\vec{v}/dt$. Façamos, então, isto na relação acima e desenvolvamos o resultado obtido

$$\begin{aligned}dW &= m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} \\ &= m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt \\ &= m d\vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= m \frac{1}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) \\ &= \frac{1}{2} m d(v^2)\end{aligned}\tag{A.15}$$

Integrando os dois membros do elemento diferencial acima entre duas posições quaisquer 1 e 2, nos quais as velocidades correspondentes sejam $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, temos

$$\begin{aligned}\int_1^2 dW &= \frac{1}{2} m \int_1^2 d(v^2) \\ \Rightarrow \Delta W &= \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2\end{aligned}\tag{A.16}$$

Exercícios

1. Dados os vetores $\vec{A} = \hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ e $\vec{C} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$. Determine:

- $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ (resultante entre $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$),
- $\vec{A} - \vec{B} + \vec{C}$ (resultante entre $\vec{A}$, $-\vec{B}$ e $\vec{C}$),
- o módulo de $\vec{A}$,
- o módulo de $\vec{B}$,
- o módulo de $\vec{A} + \vec{B}$,
- os ângulos formados por $\vec{A}$ com os x , y e z ,
- o unitário paralelo à resultante entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

2. Usando vetores, calcule a distância entre os pontos $P = (4, 5, -7)$ e $Q = (-3, 6, 12)$.

3. Provar que a reta que liga os pontos médios de dois lados de um triângulo qualquer é paralela ao terceiro lado e igual à metade deste.

4. Provar que ligando-se os pontos médios dos lados consecutivos de um quadrilátero qualquer, a figura resultante é um paralelogramo.

Obs: Este problema é mais geral. Verifique que um paralelogramo é obtido mesmo que os quatro pontos não estejam num plano (sejam quatro pontos genéricos do espaço).

5. Seja O um ponto qualquer no interior de um triângulo A, B, C e sejam P, Q, R os pontos que dividem ao meio os lados AB , BC e CA , respectivamente. Provar que $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR}$. Esta igualdade persiste se o ponto O for exterior ao triângulo?

6. Sob que condições o produto escalar é zero?

7. Escreva o módulo de um vetor através do produto escalar.

8. Sendo $\vec{C}$ a resultante entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, mostre que $C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta$, sendo θ o ângulo formado por $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

9. Mostre que para se projetar um vetor numa certa direção basta multiplicá-lo escalarmente pelo unitário característico da direção.

10. Considerando os vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$ do exercício 1, calcule:

- $\vec{A} \cdot \vec{B}$, $\vec{A} \cdot \vec{C}$ e verifique a propriedade distributiva.
- o ângulo formado entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$ e entre $\vec{B}$ e $\vec{A} + \vec{C}$;
- os módulos de $\vec{A}$, de $\vec{B}$ e de $\vec{A} + \vec{C}$;
- a projeção do vetor $\vec{A} + \vec{B}$ sobre o vetor $\vec{C}$;
- os ângulos formados por $\vec{A}$ com x , y e z .

11. Determine o valor de a tal que $\vec{A} = 2\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}$ e $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ sejam perpendiculares.

12. Mostre que os vetores $\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ e $\vec{C} = 2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ formam um triângulo e que este triângulo é retângulo.

13. Provar que as diagonais de um losângo são perpendiculares.

14. Determine o ângulo formado por duas diagonais internas de um cubo.

15. Provar que qualquer triângulo inscrito num semicírculo é retângulo, em que a hipotenusa é o diâmetro do semicírculo.

16. Mostre que o produto vetorial $\vec{A} \times \vec{B}$, escrito em termos das componentes, é dado por $\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}$, que também pode ser expresso por um determinante

$$\vec{A} \times \vec{B} = \det \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

17. Dados $\vec{A} = 3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ e $\vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$,

a) calcule $\vec{A} \times \vec{B}$ (veja exercício anterior);

b) confirme que realmente $\vec{A} \times \vec{B}$ é perpendicular a $\vec{A}$ e $\vec{B}$, mostrando que $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} = 0$ e $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{B} = 0$.

18. Mostre que $|\vec{A} \times \vec{B}|$ corresponde à área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

19. Multiplique a relação (A.9) por $\vec{a}$ e $\vec{c}$ e obtenha as demais relações que caracterizam a lei dos senos.

20. Repetir a dedução feita para obtenção de $\cos(\alpha + \beta)$, mas usando dois vetores quaisquer em lugar dos unitários $\hat{u}$ e $\hat{v}$ da Figura A.9. Obter, também $\sin(\alpha + \beta)$, considerando tanto vetores unitários como vetores quaisquer.

22. Se $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ e $\vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, achar um vetor que tenha módulo 5 e que seja perpendicular aos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

23. Sejam três pontos do espaço, $(1,1,1)$, $(1,-1,2)$ e $(-1,2,-1)$. Achar um vetor unitário perpendiculares ao plano.

24. Idem para o plano $x + 2y - z = 3$.

25. Achar a equação do plano perpendicular ao vetor $\vec{V} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ e que passe pelo ponto $P(-1, 0, 2)$.

26. Calcular o ângulo formado pelas retas $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ em que as coordenadas dos pontos A , B e C são $A(0, 0, 2)$, $B(3, 4, -2)$ e $C(-1, 1, 0)$.

27. Calcular a equação do plano que passa por $P(1, 0, 2)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{V} = -\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

28. Dos infinitos planos paralelos aos vetores $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ e $\vec{B} = -\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$, achar o que passa por $P(1, 0, -1)$

29. Seja $\vec{r}$ o vetor posição de uma partícula movimentando-se num plano, e θ o ângulo que o vetor $\vec{r}$ faz com o eixo dos x . Como vimos, podemos escrever qualquer vetor (e, particularmente, o vetor $\vec{r}$) como $\vec{r} = r\hat{r}$. Partindo de $\vec{r}$ escrito dessa forma, calcule a velocidade e aceleração da partícula em termos de r , θ , $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$, em que $\hat{\theta}$ é um vetor unitário perpendicular a $\hat{r}$.

Apêndice B

Uma demonstração do teorema de Pitágoras

Vamos fazer uma demonstração do teorema de Pitágoras seguindo mais ou menos a linha de raciocínio do próprio Pitágoras. Sejam dois quadrados de lados b e c , dispostos convenientemente como mostra a Figura B.1

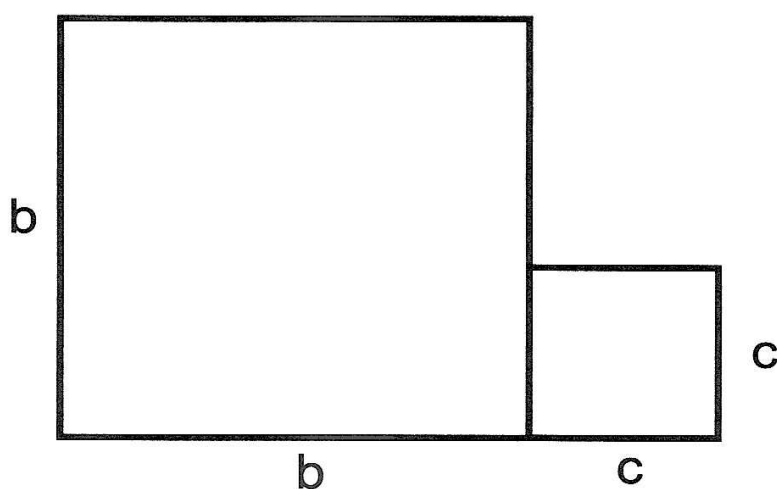


Figura B.1: Quadrados de lados b e c

Cortemos uma fatia correspondente a um triângulo retângulo de catetos b e c , como está sendo mostrado na Figura B.2, na qual chamamos de a a hipotenusa deste triângulo. Vamos transportar esta fatia para a face superior do quadrado de lado b , como está indicado na própria Figura B.2.

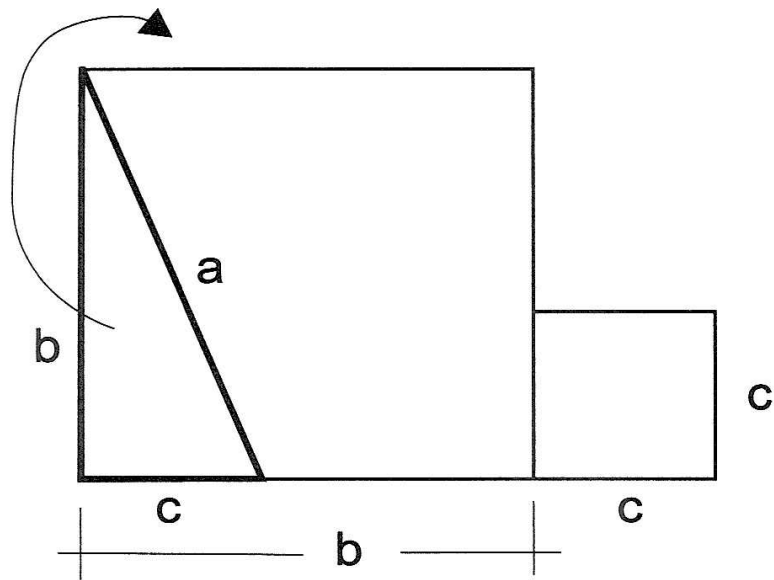


Figura B.2: Corte de uma fatia do quadrado de lado b

A Figura B.3 mostra o resultado desta operação, bem como o corte de um outro triângulo retângulo, idêntico ao primeiro, que será transportado para a posição mostrado na própria figura.

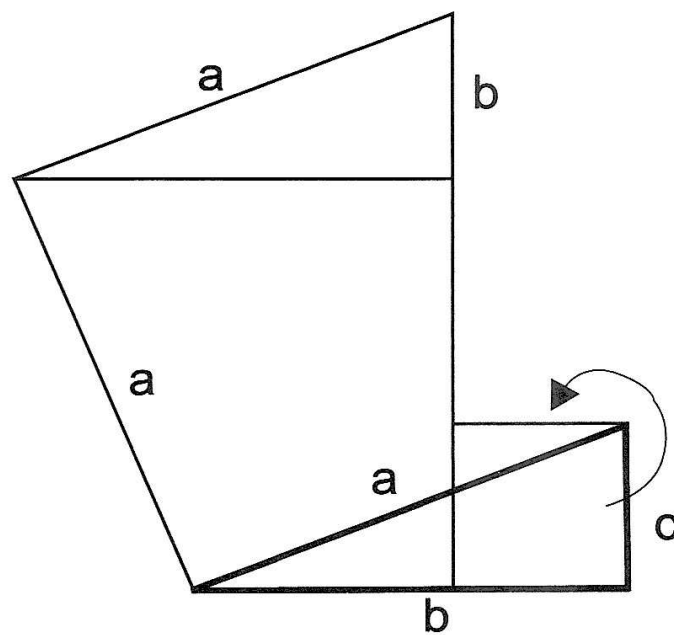


Figura B.3: Corte de uma outra fatia idêntica à primeira

Finalmente, com a última transposição indicada na figura anterior, obtemos a Figura B.4, mostrando o quadrado final de lado a que possui área igual à soma das áreas dos quadrados iniciais de lados b e c .

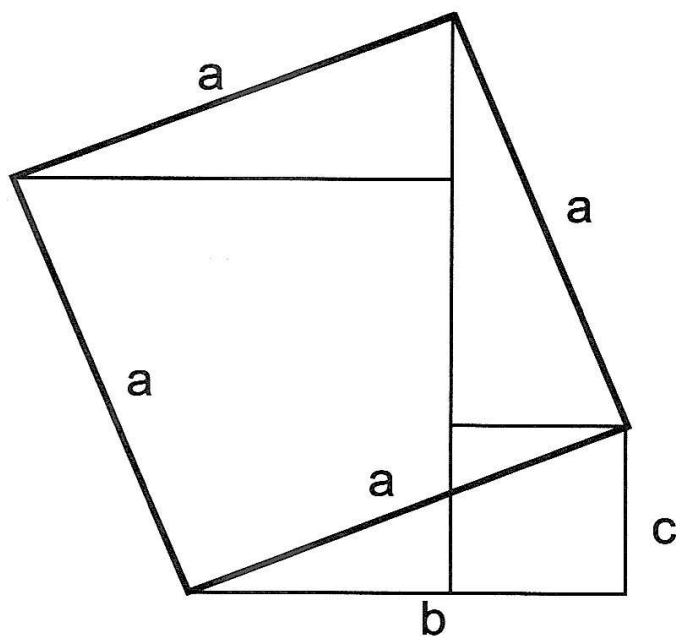


Figura B.4: Obtenção do quadrado de lado a

Apêndice C

Exemplo de equação diferencial

Consideremos o problema de um corpo de massa m movendo-se numa dimensão (eixo x) e sob a ação de uma força de constante elástica k . Nós já fomos apresentados a ele no exercício 15 do Capítulo V, no qual foi pedido para calcular a velocidade do corpo em cada ponto. Depois, continuamos tratando desse problema na Seção 8 do Capítulo VI, no qual foi calculada a posição em cada instante. Em ambos os casos, as condições iniciais do problema eram que, no instante $t = 0$, o corpo partia do repouso e da posição $x = A$.

Vamos, rapidamente, lembrar o ponto de partida. Sabendo-se que a força exercida pela mola sobre o corpo é $-kx$ (sendo o problema unidimensional, não há necessidade da notação vetorial explícita, pois a direção é o próprio eixo do movimento e o sentido é apenas questão de um sinal positivo ou negativo). Pela Segunda Lei de Newton (equação fundamental da dinâmica de uma partícula), temos

$$-kx = ma \tag{C.1}$$

Só que aqui seguiremos outro caminho. Como $a = dv/dt$ e $v = dx/dt$, temos que $a = d^2x/dt^2$. Substituindo este resultado na expressão (C.1), obtemos a equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{C.2}$$

Como a incógnita (variável x) aparece com derivadas, temos que a equação acima se chama “equação diferencial” de segunda ordem (porque a variável x aparece derivada duas vezes). Apenas as equações diferenciais de primeira ordem podem ser associadas (pelo menos diretamente) ao processo de integração. No caso particular de (C.2), se substituirmos dx/dt por v , cairemos, como já vimos, numa equação diferencial de primeira ordem. Entretanto, nem sempre isto acontece (ou melhor quase sempre não acontece) e a solução tem de ser obtida diretamente da própria equação diferencial. Vamos, então, para exemplificar, ver como a solução $x(t)$ pode ser diretamente obtida da equação (C.2) (sem passar pelos processos intermediários de integração).

Não há uma regra nem uma fórmula geral para solucionar uma equação diferencial. Nem sempre, também, uma equação diferencial possui solução (aliás, isso não é novidade, pois, como sabemos, nem sempre uma integral possui solução analítica). A solução da equação (quando existe) vai depender do tipo de equação. No caso acima, ela é bem fácil de ser obtida. A expressão (C.2) está nos dizendo que a função $x(t)$ é tal que derivando-a duas vezes, tem-se de voltar à x com um fator inicial k/m (e com sinal menos para haver o cancelamento). Não é uma tarefa árdua lembrar que as funções seno e cosseno possuem essa característica, isto é, derivando-se o seno e cosseno duas vezes volta-se a eles mesmos e com o sinal trocado. Quanto ao fator k/m , é só uma questão de ajustar o argumento dessas funções. Assim, temos que a solução de (C.2) tanto pode ser $\sin(\sqrt{k/m} t)$ como $\cos(\sqrt{k/m} t)$. Verifique você mesmo que substituindo-se x por qualquer uma dessas quantidades em (C.2), a equação é realmente satisfeita. Observe, também, o papel do fator $\sqrt{k/m}$, junto a t , para gerar o fator final k/m .

Assim, podemos dizer que a solução geral da equação (C.2) é

$$x(t) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \quad (\text{C.3})$$

em que C_1 e C_2 são duas constantes cujos valores dependerão das condições iniciais do problema. Não é difícil perceber que o número de constantes de uma equação diferencial está diretamente relacionado ao número que caracteriza sua ordem (se fosse de terceira ordem, teríamos três constantes e assim por diante). No caso do nosso problema, sabemos que em $t = 0$, $x = A$ e $v = 0$. Usando essas condições na solução acima, vemos que, neste caso particular, o valor das constantes são $C_1 = 0$ e $C_2 = A$ (verifique isto), o que leva ao resultado obtido na seção 8 do Capítulo VI. Obviamente, para outras condições de contorno, essas constantes teriam outros valores.

Para concluir, vamos fazer duas observações

(i) É comum, também, apresentar a solução acima, dada por (C.3) de uma forma mais compacta. Para tal, reescrevem-se as constantes C_1 e C_2 convenientemente como

$$\begin{aligned} C_1 &= A \cos \alpha \\ C_2 &= A \sin \alpha \end{aligned}$$

(quaisquer pares de números C_1 e C_2 podem sempre ser escritos na forma acima). Fazendo esta substituição em (C.3), temos

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos \alpha \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + A \sin \alpha \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \\ &= A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \alpha\right) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

(ii) Para obter a solução da equação diferencial (C.2), procuramos funções cujas derivadas voltavam a elas mesmas e com o sinal trocado (que é o caso do seno e cosseno). As funções exponenciais também possuem essa propriedade (quanto ao sinal menos, é apenas uma questão de introduzir o número imaginário $i = \sqrt{-1}$ como fator). Portanto, podemos ver que $e^{i\sqrt{k/m}t}$ e $e^{-i\sqrt{k/m}t}$ são soluções de (C.2) (verifique você mesmo). Assim, a solução geral desta equação pode ser dada por

$$x(t) = D_1 e^{i\sqrt{k/m}t} + D_2 e^{-i\sqrt{k/m}t} \quad (\text{C.5})$$

na qual denotei as constantes por D_1 e D_2 para deixar claro que não são as mesmas C_1 e C_2 da solução anterior. A equivalência entre essas soluções pode ser verificada se lembrarmos de (veja Apêndice D)

$$\begin{aligned} e^{i\sqrt{k/m}t} &= \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + i \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ e^{-i\sqrt{k/m}t} &= \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - i \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Substituindo essas relações em (C.5) e redefinindo convenientemente as constantes, a forma da solução anterior é diretamente obtida (verifique).

Apêndice D

Expansão de uma função em série de potências

Vou apresentar o conceito da expansão em série de potências de uma função de forma bem direta, baseado no ponto de vista da indução. Seja, então, uma certa função $f(x)$ (com o desenvolvimento do que será apresentado, veremos que condições ela vai precisar satisfazer). A nossa ideia é fazer uma expansão dessa função em torno de um certo ponto. Consideremos que esse ponto seja $x = a$. Naturalmente, se substituirmos x por a nessa expansão, deveremos ter como resultado $f(a)$. Também, se substituirmos $x = a$ na derivada da expansão o resultado deverá ser $f'(a)$ (na qual a notação está significando derivada com respeito à variável x). E assim sucessivamente para $f''(a)$, $f'''(a)$ etc.

Vamos começar pensando apenas na compatibilidade com os dois primeiros termos, isto é, $f(a)$ e $f'(a)$. Não é difícil ver que os termos iniciais da expansão devem ser

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \dots \quad (\text{D.1})$$

em que os pontos depois do sinal $+$ representam os termos que iremos colocar. Realmente, substituindo $x = a$ no lado direito, o segundo termo se anula. Também, derivando em relação a x , temos a compatibilidade com o segundo termo.

Extrapolando um pouco esse raciocínio, temos que a inclusão do terceiro termo compatível com $f''(a)$ nos leva a

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{1}{2}(x - a)^2 f''(a) + \dots \quad (\text{D.2})$$

Como podemos observar, substituindo $x = a$ no lado direito, obtemos $f(a)$. Derivando os três termos da expansão e substituindo $x = a$, obtemos $f'(a)$. Finalmente, derivando duas vezes e fazendo a mesma substituição o resultado $f''(a)$ é obtido.

Agora, acho que já dá para perceber quais são os demais termos da expansão.

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n
\end{aligned} \tag{D.3}$$

em que $f^{(n)}(a)$ está representando derivada n -ésima de $f(x)$ no ponto $x = a$.

Assim, vemos também qual a condição que $f(x)$ deve satisfazer para ser expandida em série de potências, em torno do ponto $x = a$. Ela deve ser diferenciável em qualquer ordem nesse ponto.

A expansão de uma função em série de potência toma também o nome de **Série de Taylor**. No caso particular de a expansão ser em torno do ponto $x = 0$, isto é,

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + f'(a)x + \frac{1}{2}f''(a)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)x^3 + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)x^n
\end{aligned} \tag{D.4}$$

Ela toma o nome de **Série de Maclaurin**.

Como aplicação, relembremos da expansão do binômio de Newton, vista no Capítulo II, que foi deduzida para n inteiro, isto é,

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= a^n + n a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3}b^3 \\
&+ \dots
\end{aligned} \tag{D.5}$$

Naquela oportunidade, tínhamos dito que ela era válida para qualquer n , mesmo que não fosse inteiro. Vejamos isto agora. O resultado é consequência da expansão em série de potências. Para vermos isto, seja a função $f(x) = (a+x)^n$ e façamos uma expansão em torno do ponto $x = 0$ (série de Maclaurin). O primeiro termo é a^n ; o segundo, $na^{n-1}x$; o terceiro, $\frac{1}{2!}n(n-1)a^{n-2}x^2$; e assim sucessivamente. Portanto, podemos escrever que o resultado da expansão é

$$(a+x)^n = a^n + n a^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}x^2 + \dots \tag{D.6}$$

substituindo $x = b$ na expressão acima obteremos a conhecida expansão binomial para $(a+b)^n$.

Uma outra aplicação direta da expansão em série de potência é a de e^x , utilizada no Capítulo VII (veja relação VII.22). É imediato mostrar que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \tag{D.7}$$

Verifique você mesmo. Da mesma forma, verifique que as expansões de $\sin x$ e $\cos x$ são

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (\text{D.8})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad (\text{D.9})$$

Agora, de posse dessas expansões, vemos facilmente o porquê da conhecida relação

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (\text{D.10})$$

Apêndice E

Resolução de alguns exercícios

Exercício II.2

$$\begin{aligned}(a+b)(a+b)^n &= (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}\end{aligned}\quad (\text{E.1})$$

Vamos considerar cada uma dessas somas separadamente.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k &= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k\end{aligned}\quad (\text{E.2})$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} \\ &= b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k\end{aligned}\quad (\text{E.3})$$

Sendo que na primeira linha da relação (E.3) foi feita a substituição de k por $k-1$ (índice de soma). Substituindo (E.2) e (E.3) na relação inicial (E.1), obtemos

$$(a+b)(a+b)^n = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n-k+1} b^k \quad (\text{E.4})$$

Vamos trabalhar os dois coeficientes binomiais que aparecem em (E.4).

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right) \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n-k+1)} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} \tag{E.5}
\end{aligned}$$

Em relação aos dois primeiros termos do lado direito de (E.4), também podemos reescrevê-los convenientemente como

$$a^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 \tag{E.6}$$

$$b^{n+1} = \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1} \tag{E.7}$$

A substituição de (E.5), (E.6) e (E.7) em (E.4) permite escrever o resultado procurado, isto é,

$$(a+b)(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k$$

Exercício III.1(b)

Nós temos para Δf

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \sqrt{(x+\Delta x)^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1} \\
&= [(x+\Delta x)^2 + 1]^{\frac{1}{2}} - (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \\
&= [x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 1]^{\frac{1}{2}} - (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \\
&= [(x^2 + 1) + 2x\Delta x + \dots]^{\frac{1}{2}} - (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \\
&= (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}-1} 2x\Delta x + \dots - (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \\
&= (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} x\Delta x + \dots
\end{aligned}$$

em que usamos a expansão binomial (II.27) e mantivemos apenas os termos em Δx (pois tínhamos em mente o limite $\Delta x \rightarrow 0$ a ser tomado na etapa seguinte). Assim,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Exercício III.5(a)

Como foi dito no texto, não é necessário explicitar y em termos de x para fazer a derivada. Portanto,

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Exercício IV.6(c)

Sejam x e y os catetos de um triângulo retângulo. A sua área é então dada por

$$A = \frac{xy}{2}$$

Pela natureza do problema, $\frac{dA}{dx} = 0$ corresponderá a um máximo (pois a área mínima é zero). Assim, não haverá necessidade de verificações adicionais.

Derivando a relação acima e igualando o resultado a zero, encontramos

$$\frac{dA}{dx} = y + x \frac{dy}{dx} = 0$$

Como a hipotenusa é dada por $l - x - y$, temos

$$(l - x - y)^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad l^2 - 2lx - 2ly + 2xy = 0$$

Desta relação podemos tirar y e $\frac{dy}{dx}$ (em termos de x) para substituir acima. Entretanto, nem vai precisar de muito trabalho. Calculando $\frac{dy}{dx}$, encontramos

$$-l - l \frac{dy}{dx} + y + x \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{l - y}{x - l}$$

Substituindo este resultado na expressão inicial, temos

$$\begin{aligned} y + x \frac{l - y}{x - l} &= 0 \\ \Rightarrow (x - l)y + x(l - y) &= 0 \\ \Rightarrow xy - ly + xl - xy &= 0 \\ \Rightarrow x &= y \end{aligned}$$

Como vemos, o triângulo possui catetos iguais (isósceles). E o valor do cateto pode ser diretamente obtido da relação de Pitágoras. O resultado é

$$x = y = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)l$$

Exercício IV.14

O tempo para a pessoa ir de P até Q é dado por

$$t = t_{PQ} + t_{QR}$$

A primeira parcela da expressão acima é igual à distância $PR = 2 \cos \alpha$ (o triângulo PQR é retângulo - veja Figura E.1) dividida pela velocidade (2 km/h). O tempo de R a Q é dado pelo comprimento de arco correspondente (como o raio é unitário, o comprimento de arco é simplesmente θ - em radianos) dividido pela velocidade 4 km/h .

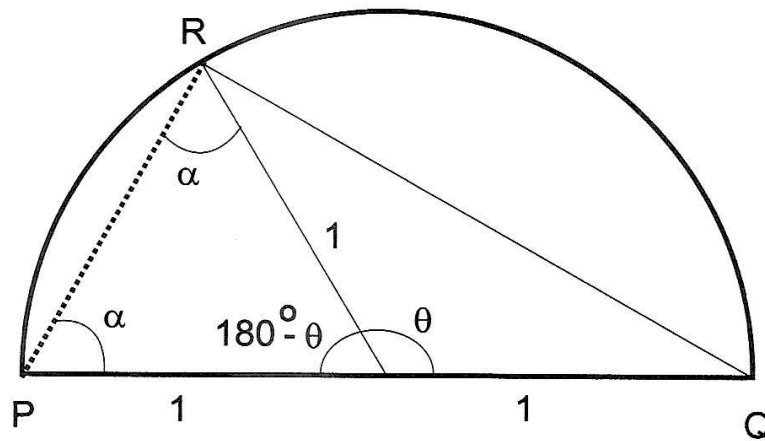


Figura E.1: Exercício IV.14

Levando essas quantidades na expressão inicial, e usando o fato de que $\alpha = \frac{1}{2}\theta$, temos a seguinte expressão para t

$$t = \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\theta$$

Como vemos, o problema foi transformado numa função $t(\theta)$. Vamos procurar o valor extremo desta função.

$$\frac{dt}{d\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

Este valor corresponde a um tempo máximo pois $\frac{d^2t}{d\theta^2} = -\frac{1}{4} \cos \frac{\theta}{2}$ é negativo para o valor de θ acima encontrado. Portanto,

$$t_{\text{máx}} = \cos \frac{\pi}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{3} = 1,13h$$

Como a expressão não fornece mais nenhum outro valor que anule a primeira derivada, o tempo mínimo deve ser encontrado nas condições de extremo do próprio problema. Assim, considerando que ele faça o percurso só nadando, temos que o tempo para isso é $t = \frac{2}{2} = 1h$. Se for só andando, temos $t = \frac{\pi}{4} = 0,79h$. Como podemos observar, o tempo mínimo é

$$t_{\min} = 0,79h$$

Exercício IV.21

Seja Q um ponto de coordenadas (x, y) sobre a reta. A distância D entre P e Q é dada por

$$D^2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$$

A condição de distância mínima é $\frac{dD}{dx} = 0$ (poderia ser, também, $\frac{dD}{dy} = 0$). Então, derivando-se a expressão acima em relação a x temos

$$D \frac{dD}{dx} = (x - 1) + (y - 1) \frac{dy}{dx}$$

Como o ponto Q está sobre a reta, as coordenadas deste ponto são satisfeitas pela equação da reta. Assim, podemos substituir na equação acima y por $2x + 3$ e, conseqüentemente, $\frac{dy}{dx} = 2$. Fazendo isto, encontramos

$$D \frac{dD}{dx} = 5x + 3$$

Como $D \neq 0$, $\frac{dD}{dx} = 0$ se $x = -\frac{3}{5}$ (é claro que este valor só pode corresponder a um mínimo pois a distância máxima é infinita). Esta é a coordenada x do ponto Q , que está sobre a reta. Portanto, a sua coordenada y pode ser obtida usando a equação da reta. Diretamente obtemos que $y = \frac{9}{5}$. Assim, a distância mínima do ponto P à reta é obtida substituindo esses valores de x e y na expressão inicial. O resultado é

$$D_{\min} = \frac{4}{5}\sqrt{5}$$

Exercício IV.22

O movimento ocorre numa dimensão e, portanto, não há necessidade de se usar notação vetorial explícita. Precisamos apenas, ao usar a segunda lei de Newton, introduzir um sinal negativo em virtude de a aceleração ser negativa. Assim,

$$-G \frac{Mm}{r^2} = ma \quad \Rightarrow \quad -G \frac{M}{r^2} = \frac{dv}{dt}$$

Esta é uma equação diferencial. Do jeito que está não é possível explicitar a função da velocidade porque na equação aparecem três variáveis (v , r e t). Temos de procurar por alguma transformação que a coloque em termos de duas variáveis apenas. No caso, o uso direto da regra da cadeia fornece isto.

$$\begin{aligned} -G \frac{M}{r^2} &= \frac{dv}{dt} \\ &= \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} \\ &= \frac{dv}{dr} v \end{aligned}$$

Agora não é difícil inferir a expressão cuja derivada em relação a r levou à relação acima. O resultado é

$$\frac{GM}{r} = \frac{1}{2}v^2 + C$$

na qual C é uma constante que será fixada de acordo com as condições de contorno do problema. Sabemos que para $r \rightarrow \infty$, $v \rightarrow 0$ (pois estamos procurando a velocidade inicial mínima). Assim, vemos que a constante C deve ser zero. O valor inicial da velocidade pode então ser calculado substituindo-se $r = R$ na expressão acima (com o C igual a zero). Fazendo isto, obtemos

$$V = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Substituindo os valores da constante gravitacional G , da massa e do raio da Terra (veja esses dados na Seção 3 do Capítulo V), encontramos que V é cerca de 40.000 km/h .

Exercício IV.23

Considere o trapézio cujas dimensões estão mostradas na Figura E.2. A área deste trapézio é dada por

$$A = \frac{(2R + b)h}{6}$$

em que as variáveis b e h estão relacionadas por

$$R^2 = h^2 + \frac{b^2}{4}$$

Nós temos duas alternativas. Primeiro é combinar as duas expressões e obter A em termos de b ou de h . Segundo é trabalhar com as duas separadamente. Normalmente, o caminho a ser seguido é o primeiro. Vamos aqui seguir o segundo, que dá menos trabalho algébrico. Tomemos, então, a derivada de A com respeito a b (poderia ser em relação a h).

$$\frac{dA}{db} = \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}(2R + b)\frac{dh}{db}$$

Usando a segunda das duas expressões iniciais, temos

$$\frac{dh}{db} = -\frac{b}{4h}$$

Combinando essas duas relações e fazendo $\frac{dA}{db} = 0$, condição de extremo (no caso é máximo mesmo pois a área mínima é nula), temos

$$\begin{aligned} h - (2R + b)\frac{b}{4h} &= 0 \\ \Rightarrow 4h^2 - b^2 - 2Rb &= 0 \\ \Rightarrow 4\left(R^2 - \frac{b^2}{4}\right) - b^2 - 2Rb &= 0 \\ \Rightarrow b^2 + Rb - 2R^2 &= 0 \end{aligned}$$

A solução que nos interessa desta equação é $b = R$ (a outra é negativa).

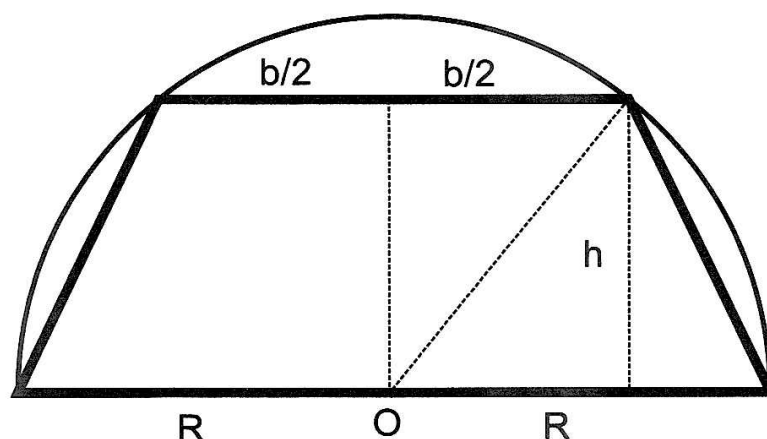


Figura E.2: Exercício IV.23

Sugiro que você resolva este exercício usando o processo mencionado acima, isto é, de primeiro explicitar a expressão da área em termos de uma variável (ou b ou h).

Exercício V.1(q)

Esta integral foi resolvida no texto por partes. Vamos seguir um outro processo. Façamos a substituição

$$x^2 + 5 = u^2 \quad \Rightarrow \quad x dx = u du$$

Substituindo esses dois resultados no integrando da expressão inicial, temos

$$\begin{aligned} x^3 \sqrt{x^2 + 5} dx &= x^2 \sqrt{x^2 + 5} x dx \\ &= (u^2 - 5)u u du \\ &= (u^4 - 5u^2) du \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int x^3 \sqrt{x^2 + 5} dx &= \int (u^4 - 5u^2) du \\ &= \frac{u^5}{5} - \frac{5u^3}{3} + C \\ &= \frac{1}{5} (x^2 + 5)^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{3} (x^2 + 5)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

Podemos resolvê-la usando um outro processo (talvez existam mais)

$$\begin{aligned} \int x^3 \sqrt{x^2 + 5} dx &= \frac{1}{2} \int x^2 \sqrt{x^2 + 5} dx^2 \\ &= \frac{1}{2} \int u \sqrt{u + 5} du \quad \leftarrow \quad x^2 = u \\ &= \frac{1}{2} \int (z - 5) z^{\frac{1}{2}} dz \quad \leftarrow \quad u + 5 = z \\ &= \frac{1}{5} z^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{3} z^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{1}{5} (x^2 + 5)^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{3} (x^2 + 5)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

Exercício V.3

$$x^2 dx = x x dx = \frac{1}{2} x dx^2 = \frac{1}{2} d(xx^2) - \frac{1}{2} x^2 dx$$

Como vemos, podemos escrever que

$$3x^2 dx = d(x^3)$$

Portanto,

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3} \int d(x^3) = \frac{1}{3} x^3 + C$$

Exercício V.6

O elemento diferencial de área, mostrado na Figura E.3, é dado por

$$dA = \left[\frac{4}{(x^2 + 1)^2} - x^2 \right] dx$$

E o ponto P , que corresponde ao limite de integração, é obtido considerando-se a interseção das duas curvas

$$x^2 = \frac{4}{(x^2 + 1)^2} \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

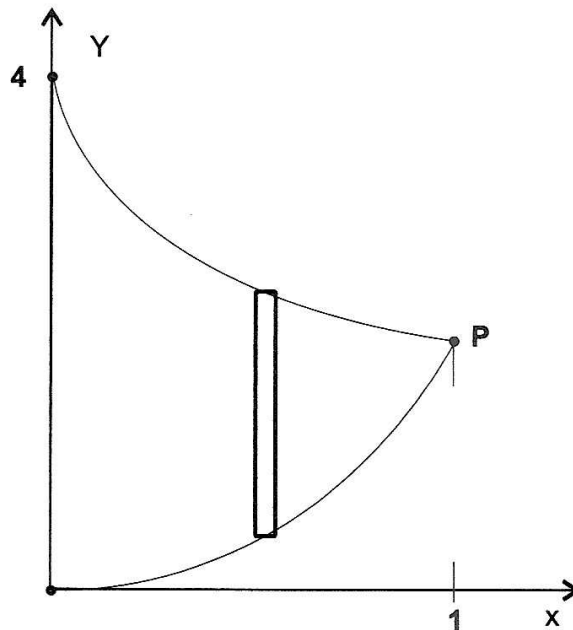


Figura E.3: Exercício V.6

A área da base do lago é então dada pela integral

$$A = 4 \int_0^1 (x + 1)^{-2} dx - \int_0^1 x^2 dx = -\frac{4}{x + 1} \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{5}{3} m^2$$

Como a altura possui $2m$, o volume do lago é $10/3 = 3,3 m^3$.

Exercício V.7

É fácil ver que o comprimento de arco infinitesimal ds é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são dx e dy . Assim, podemos escrever que

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Como $y = x^{3/2}$, temos $dy = \frac{3}{2}x^{1/2}dx$. Substituindo este valor de dy na expressão acima, vem

$$ds = \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx$$

Vemos que o elemento diferencial do problema foi perfeitamente identificado e preparado para a integração. Assim, podemos calcular o comprimento pedido da curva

$$\begin{aligned} \int_0^4 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} dx &= \frac{4}{9} \int_0^4 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{9}{4}dx\right) \\ &= \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 \\ &= \frac{2}{3} \left(10^{\frac{3}{2}} - 1\right) = 30,6 \end{aligned}$$

Exercício V.15

Como a força que atua sobre o corpo é a resultante, temos de acordo com a Segunda Lei de Newton,

$$ma = -kx \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}x$$

Não foi necessário usar a notação vetorial explicitamente porque o problema é unidimensional. Como podemos observar, do jeito em que está, esta expressão não permite escrever um elemento diferencial apropriado para ser integrado, pois há três variáveis envolvidas (v , x e t).

A maneira de contornar este problema é semelhante ao que fizemos na solução do Exercício IV.22, isto é (uso da regra da cadeia),

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$$

Substituindo este resultado na expressão anterior, podemos obter um elemento diferencial que agora está apropriado para ser integrado.

$$v dv = -\frac{k}{m}x dx$$

Fazendo a integração de acordo com os limites iniciais especificados, temos

$$\begin{aligned} \int_0^v v \, dv &= -\frac{k}{m} \int_A^x x \, dx \\ \Rightarrow \frac{v^2}{2} \Big|_0^v &= -\frac{k}{m} \frac{x^2}{2} \Big|_A^x \\ \Rightarrow v^2 &= -\frac{k}{m} (x^2 - A^2) \\ \Rightarrow v &= \sqrt{\frac{k}{m} (A^2 - x^2)} \end{aligned}$$

Exercício V.16

A pressão de uma coluna líquida é dada pela conhecida relação

$$p = p_o + \rho g y$$

na qual p_o é a pressão atmosférica (que não precisará ser considerada pois ela está dos dois lados do vidro), ρ é a densidade da água (aproximadamente $1000 \, \text{kg/m}^3$) e y é a altura medida a partir da superfície do líquido.

A força devido à pressão do líquido sobre um elemento de área dA do vidro é (de acordo com a definição de pressão)

$$dF = p dA$$

Como a pressão não varia horizontalmente para uma mesma altura, podemos tomar como elemento de área dA um retângulo de lado horizontal $1 \, \text{m}$ (largura do aquário) e lado vertical dy . Assim, a forma do elemento diferencial dF , pronto para ser integrado, é

$$dF = \rho g y dy$$

Substituindo os valores numéricos ($g = 10 \, \text{m/s}^2$) e fazendo a integração de acordo com os limites da altura do aquário, temos

$$\begin{aligned} F &= 10^4 \int_0^{0,7} y \, dy \\ &= 2450 \, \text{N} \end{aligned}$$

Ou seja, a água exerce sobre o vidro uma força equivalente ao peso de uma massa de aproximadamente 250 kilogramas!

Exercício VI.6(h)

$$\begin{aligned} \sin 2y + 2x \cos 2y \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dx} \cos 2x - 2y \sin 2x \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{\sin 2y + 2y \sin 2x}{\cos 2x - 2x \cos 2y} \end{aligned}$$

Exercício VI.14

Tomemos o elemento de área indicado na Figura E.4.

$$\begin{aligned} dA &= y dx \\ &= \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx \end{aligned}$$

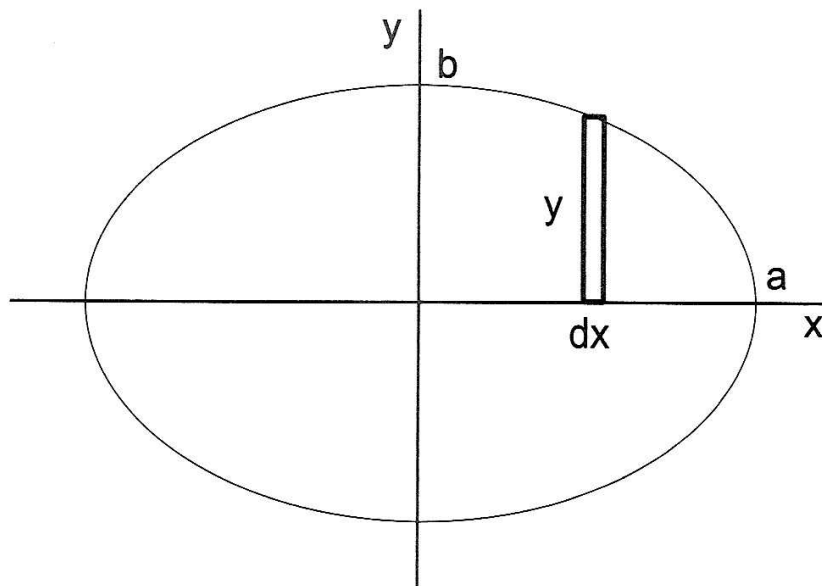


Figura E.4: Exercício VI.14

O elemento diferencial já está preparado para a integração. Considerando a simetria da figura, temos

$$A = 4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

Como não é muito visível qual é a função cuja derivada dá $\sqrt{a^2 - x^2}$, vamos fazer uma modificação no integrando a fim de procurar uma outra forma da função tal que esta resposta possa ser dada. Consideremos, então, a seguinte transformação trigonométrica

$$x = a \sin \theta \quad \Rightarrow \quad dx = a \cos \theta d\theta$$

Substituindo essas quantidades no integrando acima, temos (por enquanto, não nos preocupemos com os limites de integração - estamos apenas procurando a solução da integral)

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= a^2 \int \cos^2 \theta d\theta \\
 &= \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2\theta) d\theta \\
 &= \frac{a^2}{2} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) + C \\
 &= \frac{a^2}{2} \left(\arcsen \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) + C
 \end{aligned}$$

Esta é a solução da integral que aparece na expressão inicial. Assim, temos que a área procurada é

$$A = \frac{4b}{a} \cdot \frac{a^2}{2} \left(\arcsen \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) \Big|_0^a = 2ab \frac{\pi}{2} = \pi ab$$

Exercício VI.16

Vamos trabalhar em coordenadas polares. Neste caso, o comprimento infinitesimal ds é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são dr e $r d\theta$. Portanto,

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (r d\theta)^2}$$

Usando a equação da curva, temos

$$\begin{aligned}
 ds &= a \sqrt{\sin^2 \theta + (1 + \cos \theta)^2} d\theta \\
 &= \sqrt{2} a \sqrt{1 + \cos \theta} d\theta \\
 &= 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta
 \end{aligned}$$

Como vemos, o elemento diferencial acima está preparado para ser integrado. O comprimento da curva é então dado por

$$\begin{aligned}
 s &= 2 \times 2a \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta \\
 &= 8a \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^\pi \\
 &= 8a
 \end{aligned}$$

Na integração acima, fizemos os limites de 0 a π e multiplicamos por dois (pela equação vemos que a figura é simétrica) a fim de que o integrando ficasse positivo em todo o percurso de integração (pois estávamos querendo o módulo do comprimento).

O elemento diferencial de área em coordenadas polares é um triângulo de altura r e base $r d\theta$. Assim,

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Usando a expressão da curva, temos

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 + 2 \cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\frac{3}{2} \theta + 2 \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{3}{2} \pi a^2 \end{aligned}$$

No cálculo da área não foi preciso ter cuidado com o sinal do integrando porque, desde o início, já tínhamos que ele era positivo.

Exercício VII.1(b)

Multiplicando a equação por e^x , encontramos

$$e^{2x} + 2e^x - 35 = 0$$

que pode ser vista como uma equação do segundo grau cuja variável é e^x . A solução é muito simples (sequer há necessidade de fórmula).

$$\begin{aligned} e^{2x} + 2e^x - 35 &= 0 \\ \Rightarrow (e^x + 1)^2 - 36 &= 0 \\ \Rightarrow e^x + 1 &= 4 \\ \Rightarrow e^x &= 3 \\ \Rightarrow x = \ln 3 &= 1,1 \end{aligned} \tag{E.8}$$

O valor negativo da raiz quadrada acima não satisfaz porque levará a uma valor negativo para e^x .

Exercício VII.13(c)

Vamos fazer a substituição sugerida. Seja então

$$x = \operatorname{sh} \alpha \quad \Rightarrow \quad dx = \operatorname{ch} \alpha d\alpha$$

Levando esses resultados na expressão inicial, vem

$$I = \int \operatorname{ch}^2 \alpha d\alpha$$

Podemos resolver facilmente esta integral fazendo algumas pequenas transformações

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 \alpha d\alpha &= \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \alpha d\alpha \\ &= \operatorname{ch} \alpha d(\operatorname{sh} \alpha) \\ &= d(\operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \alpha) - \operatorname{sh} \alpha d(\operatorname{ch} \alpha) \\ &= d(\operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \alpha) - \operatorname{sh}^2 \alpha d\alpha \\ &= d(\operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \alpha) + d\alpha - \operatorname{ch}^2 \alpha d\alpha \end{aligned}$$

Temos, portanto, que a integral pode ser facilmente resolvida

$$\int \operatorname{ch}^2 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha + \frac{1}{2} \alpha + C$$

Escrevendo este resultado em termos da variável inicial x , temos

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{argsh} x + C$$

Podemos reescrever $\operatorname{argsh} x$ de forma mais explícita. Seja $y = \operatorname{argsh} x$, ou

$$\begin{aligned} \frac{e^y - e^{-y}}{2} &= x \\ \Rightarrow e^y - 2x - e^{-y} &= 0 \\ \Rightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 &= 0 \\ \Rightarrow (e^y - x)^2 - x^2 - 1 &= 0 \\ \Rightarrow e^y - x &= \sqrt{1+x^2} \\ \Rightarrow e^y &= x + \sqrt{1+x^2} \\ \Rightarrow y &= \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \end{aligned}$$

Pelos mesmos motivos do exercício acima, só consideramos a raiz positiva porque e^y é positivo. Assim, o resultado da integral é

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$$

Com o intuito de praticar, resolva esta integral fazendo uma substituição trigonométrica.

Apêndice F

Respostas de alguns exercícios

Durante as aulas, não gosto muito de dar as respostas dos exercícios. Isto porque, infelizmente, muitos estudantes são recém egressos do segundo grau e ainda carregam consigo estigmas do vestibular, no qual, muitas vezes, é apregoado que o importante é se chegar à resposta certa, mesmo que o caminho para tal não tenha fundamento adequado. Sempre achei que era mais importante o estudante começar a fazer os exercícios, **pensar sobre eles** e, mesmo sem os ter resolvido completamente, voltar à aula seguinte com uma certa familiaridade para acompanhar (e realmente entender) o desenvolvimento do que seria feito. Suas dificuldades pontuais iriam sendo eliminadas passo a passo.

Agora, na presença de um livro, esta fase intermediária da minha presença fica suprimida. Assim, algumas respostas devem ser dadas. Espero que o estudante não veja esta seção como um conjunto de números e fórmulas que devam ser atingidos a qualquer preço. Este é um conjunto apenas para possíveis conferências. Não sou de opinião que se deva dar todas as respostas. É importante que o estudante adquira confiança e procure resolver também os sem respostas e, em caso de dúvida, discuta com seus colegas sobre os desenvolvimentos que fez. Essa troca de opiniões é algo fundamental para o aprendizado em qualquer ramo do conhecimento.

Capítulo II

1. (a) $\frac{5}{4}$; (c) -1; (d) 0; (g) 0; (h) $\frac{8}{69}$; (i) 9

Capítulo III

1. As respostas podem ser facilmente verificadas fazendo as derivações pelas regras usuais de derivação. Aliás, este é justamente o teor do exercício 4.

3. (a) $\frac{8x^3-24x^2-1}{(1+4x^3)^2}$; (b) $-\frac{(15-14x)x^2}{\sqrt{5-4x}}$; (f) $-\frac{2t}{3[(1-t^2)(1-t)]^{1/3}}$

5. (a) $-\frac{x}{y}$; (c) $\frac{1-2y}{2x+2y-1}$; (e) $-(\frac{y}{x})^{1/3}$;

Capítulo IV

1. (a) $x = -1$ máximo; (d) $x = 1$ mínimo; (f) $x = a$ mínimo;
(j) $x = \frac{2ab}{a+b}$ máximo
2. (a) $v(t) = \frac{1}{3}t^3 - t$ e $x(t) = \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + 1$; (b) $x = 1$ e $x = 0,25$
(c) Sentido positivo: $-1,7 < t < 0$ e $t > 1,7$
Sentido negativo: $t < -1,7$ e $0 < t < 1,7$
4. $\frac{40}{3}$ e $\frac{20}{3}$
5. (a) $h = R$; (b) $h = 2R$
6. (a) quadrado de lado $\frac{l}{4}$; (b) $\frac{l}{3}$ (triângulo equilátero);
(c) $(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})l$ (catetos iguais)
7. altura = 3 cm e base = 6 cm (sem tampa)
8. $y = 2x - a$
9. (a) $y = 9x - 16$; (b) $y = 7x - 9$
10. (a) $109^\circ 39'$
11. Quadrado de lado $5\sqrt{2}$ cm
12. $\frac{4}{3}R$
14. $t_{\text{mín}} = 0,79$ h e $t_{\text{máx}} = 1,13$ h
15. $\frac{3\sqrt{3}}{14}$ h
17. $y = 0,2x + 2,3$
19. Pelo ponto $(2,0)$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ e $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$
20. $a = 150$ m e $b = 95,5$ m
21. $\frac{4}{\sqrt{5}}$
22. $V = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$
23. A base menor vale R .
24. $h = 3a$
25. Altura = $4a$ e raio da base = $a\sqrt{2}$

Capítulo V

1. A verificação das respostas é muito fácil, basta derivá-las e ver se coincidem com as funções iniciais.
4. $A = \frac{32}{3}$ $V = 8\pi$ (em torno do eixo y) $V = \frac{832\pi}{15}$ (em torno do eixo x)
6. $3,3 \text{ m}^3$
7. 20,4
8. 6,7

10. $F = \frac{GmMh}{(R^2+h^2)^{3/2}}$ voltada para o centro do anel.

11. $F = \frac{2GmM}{R^2} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)$

13. (c) $v = v_o + \frac{1}{3}t^3$ $x = x_o + v_o t + \frac{1}{12}t^4$

14. (b) $v = \frac{1}{4}t^2$ $x = 5 + \frac{1}{12}t^3$

16. 2450 N

Capítulo VI

5. (a) $\frac{dy}{dx} = 2ax \cos ax^2$ (e) $\frac{du}{dv} = -\sin 2v$ (t) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y} \sin 8x$

6. (a) $\frac{dy}{dx} = \sec y$ (g) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2}{\sin 2y (\sin y - \cos y)}$ (i) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(x-y)}{\sin(x-y)-1}$

7. (a) $\frac{d^2y}{dx^2} = -k^2 \sin kx$ (d) $\frac{d^2y}{dx^2} = -2 \sin x - y$

8. (a) $\frac{\pi}{2}$

11. Veja por favor o que foi dito na resposta do exercício 1 do Capítulo V.

14. πab

15. 0,75

16. $8a$ e $2\pi a^2$

Capítulo VII

1. $e^x = 1 \Rightarrow x = 0$ $e^x = -4 \Rightarrow$ Não existe nenhum valor de x no campo real.

4. (a) $\frac{dy}{dx} = 3y \cos 3x$ (d) $\frac{dy}{dx} = y e^x$

6. (b) $y = e^2 (3x - 4)$

7. Veja por favor o que foi dito na resposta do exercício 1 do Capítulo V.

12. (b) $v(t) = V e^{-\frac{b}{m}t}$ (c) $x(t) = \frac{Vm}{b} (1 - e^{-\frac{b}{m}t})$ $t \rightarrow \infty \Rightarrow D = \frac{Vm}{b}$

Quando dava aulas no ciclo básico sempre preferia turmas em períodos defasados, a fim de que o estudante já viesse sabendo Cálculo. Mesmo assim, notava que embora ele soubesse derivar e integrar, muitas vezes com certa desenvoltura, não sabia raciocinar com o Cálculo. Geralmente não sabia porque estava derivando ou o que estava integrando.

É esta a finalidade deste livro. Ele contém a minha experiência em procurar fazer o estudante raciocinar com o Cálculo. Embora mostre como derivar e integrar, a ênfase não está bem aí. Não há formulários. Na verdade, há poucas fórmulas. Procurei não usar nada em que não fosse mostrado sua origem.

Posso até ter exagerado em fazer uma demonstração do Teorema de Pitágoras num dos apêndices e enfatizar que não há necessidade de saber uma fórmula para resolver uma equação do segundo grau. Fiz isso com o intuito de não descuidar do principal objetivo do livro, que era priorizar o raciocínio em lugar do uso irracional de fórmulas prontas. Há muitos exemplos, principalmente em Geometria e Mecânica. Neste caso, procurei refazer alguns exemplos do meu livro de Mecânica, porém usando uma linguagem mais simples.